第三分册目次

第七章　数学物理偏微分方程

§17.　波动方程

163. 弦的振动方程　求偏微分方程的积分問題屬于分析的最艰深而且最广泛的部門，这里我們只限于考虑这个范圍中的基本問題。这一节中我們講連系于所謂波动方程的問題。下面形状的方程叫做波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \text{ 或 } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u,$$

其中
$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\operatorname{div}\operatorname{grad} u。$$

在[116]与[118]中考虑声与电的振动时我們遇到过这个方程。設 u 不依賴于 y 与 z，就是說，在任何一个垂直于 X 軸的平面上的所有的点，u 有相同的值。在这情形，波动方程的形状如下：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

在这样的情形下我們通常說是有平面波。現在我們来說明，当考虑紧張的弦的微小的横振动时，我們得到这样的方程。

所謂弦我們指的是纖細的綫，它可以自由的弯曲。我們設它受有很强的張力 T_0 的作用，并且在平衡状态下，沒有沿 X 軸方向的外力(圖 127)。此外，如果它由平衡位置遭受了随意的外力的作用，弦就开始振动，而且当平衡时弦上具有横坐标为 x 而位置在 N 的点，在时刻 t 就具有位置 M。我們只限于考虑横振动，假定全部运动出現在一个平面上，而且弦上的点垂直于 X 軸运动。我們

把弦上的点的位移 $\overline{NM}$ 記作 u。这个位移就是两个自变量 x 与 t 的未知函数。

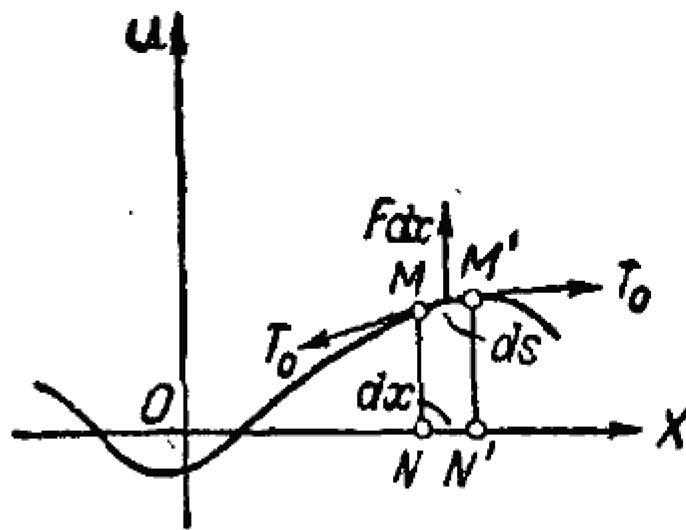


圖 127.

取弦的單元 MM'，平衡时它的位置在 NN'。我們算作形变是很小的，以至于与 1 比較起来可以忽略掉导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的平方項。設 α 是弦的切綫与 X 軸作成的銳角。我們有

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\partial u}{\partial x}$$

于是

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\approx\frac{\partial u}{\partial x}。$$

把对于單位長計算的，弦上垂直于 X 軸的作用力記作 F。作用在所考慮的單元 MM' 上的就有下列各力：在点 M' 的張力，它的方向沿着在点 M' 的切綫方向，而与 X 軸作成銳角；在点 M 的張力，方向沿着在点 M 的切綫方向，与 X 軸作成鈍角；以及沿 u 軸方向的力 Fdx。由于假定了形变是很小的，我們可以算作上述两个張力的大小等于張力 T_0 的大小。先設在所說的力 F 的作用下弦成平衡。投影在 u 軸上，就有下面的平衡条件

$$T_0\sin\alpha'-T_0\sin\alpha+Fdx=0, \tag{1}$$

其中 α' 是上面說的角度 α 在点 M' 的值，就是說

$$\sin\alpha'=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'};\quad \sin\alpha=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M},$$

于是推知：

$$T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M}\right]+Fdx=0。 \tag{2}$$

在方括号中的差，表达的是当 x 改变了 dx 时函数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的改变

量。用微分来替代这个改变量，就得到[I, 50]：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx。$$

代入到(2)中，消去 dx，就得到弦的平衡方程：

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F=0。\tag{3}$$

为要得到运动方程，我們只須依照达朗倍尔原理，对于外力再补充以慣性力，它可以由下述方法得到：点 M 的速度显然是 $\frac{\partial u}{\partial t}$，加速度是 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$，慣性力等于加速度与質量的乘积而取相反的符号，所以單元 MM' 的慣性力是：

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho dx,$$

其中 ρ 是弦的綫密度，就是單位長的質量，对于單位長来講，慣性力就是

$$-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

并且我們算作 ρ 是常量。

于是，在方程(3)中用 $F-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 来替代 F，我們就得到运动方程：

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F。$$

用 ρ 除，并設

$$\frac{T_0}{\rho}=a^2,\ \frac{F}{\rho}=f,\tag{4}$$

我們就得到弦的强迫横振动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f。\tag{5}$$

若外力消失，我們就有 $f=0$，于是得到弦的自由振动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}。\tag{6}$$

在第四卷里，我們将指出如何根据哈米尔頓原理导出方程(5)。

以上我們假定了外力是連續地分布在整个弦上的，但有时我們遇到的是力 P 集中在一个点 C 的情形。考虑这样的情形时，或者看作是上面的極限情形，就是設力是作用在点 C 附近的一个長度为 ε 的无穷小單元上，而当 $\varepsilon\to 0$ 时，力的大小与 ε 的乘积趋向有限的極限，这个極限不等于零；或者对于点 C 附近的單元 MM' 直接运用方程(2)而用 P 来替代 Fdx。这时要注意我們对于 Fdx 不补充以慣性力$\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho\,dx\right)$，因为当 $dx\to 0$ 时我們算作它趋向零。

設單元的端点逼近于点 C，我們把当自右或自左逼近于点 C 时 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 所趋向的極限值分别記作：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_-,$$

由方程(2)取極限就得到

$$T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_-\right]=-P。\tag{7}$$

如此，我們看出，这个弦在集中力作用所在的点 C 具有角点，就是左右切綫方向不同的点。

像在动力学中一般的情形一样，一个运动方程(5)不足以完全确定弦的运动，还需要給定在初始时刻 $t=0$ 时它的状态，也就是它的点的位置 u，以及当 $t=0$ 时它們的速度 $\frac{\partial u}{\partial t}$，这都要是 x 的已知函数：

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x)；\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x)。\tag{8}$$

当 $t=0$ 时，未知函数 u 应当满足这两个条件，它們叫做初始条件。

理論上講，可以考慮无穷的弦，在这情形下为要求解只須方程(5)与条件(8)就够了，其中 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 应当是給定在整个无穷区間$(-\infty, +\infty)$上的。这情形就对应于在无界空間中对于平面波的討論。以后我們将看到，由无穷的弦得到的結果所給出的扰动分布的景象，当这些扰动沒有达到有界弦的端点时，在这样的时間区間里，这种景象也就是对于有界弦的景象。

不过若是在点 $x=0$ 与 $x=l$ 弦是界于一头或界于两头的，就需要說明它的端点的現象。例如，設弦的一端 $x=0$ 是固定住的。在这情形下，我們应当有

$$u\Big|_{x=0}=0。\tag{9}$$

若是端点 $x=l$ 也是固定住的，則我們又得到

$$u\Big|_{x=l}=0,\tag{9_1}$$

对于任何的 t，这两个条件应当滿足。

弦的端点也可能不是固定住的，而是按給定的方式运动的。那时弦的这两个点的縱标应当認为是时間的已知函数，就是說，設

$$u\Big|_{x=0}=\chi_1(t);\quad u\Big|_{x=l}=\chi_2(t)。\tag{10}$$

无論怎样，如果弦是界于一头或界于两头的，对于它的每一个端点就应当有給定的条件，这样的条件叫做边值条件。

因此，我們看出，对于具体的物理問題的解来講，补充的初始条件与边值条件的重要性并不低于运动方程，并且我們的兴趣不在于运动方程的随意的解或者甚至于它的一般解的求法，而是在于求适合于所設置的初始条件与边值条件的解。

164. 达朗倍尔解 在无穷弦的自由振动情形，要求的函数 $u(x, t)$ 应当滿足方程(6)：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

而要适合初始条件(8):

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x);\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x),$$

这里由于弦是无界的,函数 $\varphi(x)$与 $\varphi_1(x)$应当是給定在区間$(-\infty,+\infty)$上的。

可以求出方程(6)的具有这种形状的一般解,使得容易适合于条件(8)。

为此,我們变换方程(6),引用新的自变量:

$$\xi=x-at,\ \eta=x+at,$$

由此
$$x=\frac{1}{2}(\eta+\xi);\quad t=\frac{1}{2a}(\eta-\xi)。$$

看作 u 通过中間变量 ξ 与 η 依賴于 x 与 t, 应用求复合函数的导数的法則,由对新变量的导数来表达对原来变量的导数:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta};\ \frac{\partial u}{\partial t}=a\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)。$$

再应用一次这两个公式,就得到:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=$$
$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)-a^2\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=$$
$$=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right),$$

由此
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$

于是方程(6)就与下面这方程相当:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0。\tag{11}$$

把方程(11)写成

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=0,$$

就可以看出 $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ 不依赖于 η，就是說它只是 ξ 的函数。設

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\theta(\xi),$$

求积分，就得到

$$u=\int \theta(\xi)d\xi+\theta_2(\eta),$$

其中 $\theta_2(\eta)$ 是 η 的任意函数（当对 ξ 求积分时，“常数”可以依賴于 η）。这里第一項可以算作是 ξ 的任意函数，因为 $\theta(\xi)$ 是 ξ 的任意函数，我們用 $\theta_1(\xi)$ 来記第一項，就有：

$$u=\theta_1(\xi)+\theta_2(\eta),$$

或者，換到原来的变量 (x, t)，

$$u(x, t)=\theta_1(x-at)+\theta_2(x+at), \tag{12}$$

其中 θ_1 与 θ_2 是各自的变量的任意函数。方程（6）的这个一般解叫做达朗倍尔解；它含有两个任意函数 θ_1 与 θ_2。我們利用初始条件（8）来确定这两个函数，根据等式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a[-\theta_1'(x-at)+\theta_2'(x+at)]。$$

以及等式(12)，得到：

$$\theta_1(x)+\theta_2(x)=\varphi(x); \quad -\theta_1'(x)+\theta_2'(x)=\frac{\varphi_1(x)}{a}, \tag{13}$$

由后一个等式求积分并变号：

$$\theta_1(x)-\theta_2(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(z)dz+C。$$

讓 $x=0$，我們来确定任意常数 C：

$$C=\theta_1(0)-\theta_2(0)。$$

可以算作 $C=0$，就是設

$$\theta_1(0)-\theta_2(0)=0, \tag{14}$$

这并不失去一般性，因为如果 $C\neq 0$，則我們可以引用函数

$$\theta_1(x)+\frac{C}{2}, \quad \theta_2(x)-\frac{C}{2}$$

来替代函数 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$，这样等式(13)并不改变，而满足了(14)。

因此，我們有：

$$\theta_1(x)+\theta_2(x)=\varphi(x);\ \theta_1(x)-\theta_2(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(z)dz。 \quad (15)$$

由此我們不难确定函数 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$；

$$\begin{aligned}\theta_1(x)&=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)dz;\\ \theta_2(x)&=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)dz。\end{aligned} \quad (16)$$

把所得到的表达式代到公式(12)中，就求得：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\varphi_1(z)dz+$$
$$+\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\varphi_1(z)dz,$$

結果得到：

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)dz。 \quad (17)$$

显然，如果在 $-\infty<x<\infty$ 时 $\varphi(x)$有連續导数 $\varphi'(x)$和 $\varphi''(x)$，而 $\varphi_1(x)$有連續导数 $\varphi_1'(x)$，則由公式(17)給出的解(所謂古典解)应当是二次連續可微的。可是往往要处理这样的問題，其中初始扰动是由不滿足这些条件的函数給出的。例如，如果在初始时刻弦呈折綫的形状，則 $\varphi(x)$在折綫的各頂点处沒有确定的导数。虽然函数 $u(x,t)$并不处处都有直到二阶的連續导数，但仍可合理地認为公式(17)給出了問題的解。在这个情形我們說，問題有所謂广义解。广义解的理論将在第四卷里講到。

165. 特殊情形 公式(17)給出了所提出問題的完全的解。为要更好的認清所得到的解，我們分别各种特殊情形討論如下。

1. 初始冲量等于零，就是說，弦上点的初始速度等于零。这时由条件 $\varphi_1(x)=0$ 及公式(17)給出：

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}, \tag{18}$$

在初始时刻 $u\Big|_{t=0}=u(x,0)=\varphi(x)$。

現在我們看解(18)的物理意义。表达式(18)的分子由两項組成，我們先看第一項：$\varphi(x-at)$。

設一个观察者由初始时刻 $t=0$ 开始，由弦上的点 $x=c$ 以速度 a 在 OX 軸的正方向移动，也就是說，他的横坐标依照公式 $x=c+at$ 或 $x-at=c$ 改变。对于这样的观察者来講，由公式 $u=\varphi(x-at)$ 所确定的弦的位移总保持一个常数值，而等于 $\varphi(c)$。函数 $u=\varphi(x-at)$ 所确定的这个現象叫做正波的傳播。回到达朗倍尔公式(12)，我們可以說，$\theta_1(x-at)$ 这一項給出正波，它以速度 a 在 OX 軸的正方向傳播。同理，第二項 $\theta_2(x+at)$ 所确定的弦的振动是这样的，这时扰动在 OX 軸的負方向以速度 a 傳播，并且在时刻 t 具有横坐标 $c-at$ 的点与当 $t=0$ 时的点 $x=c$ 具有相同的离开距离 u。它所对应的現象我們叫做反波的傳播。

a 的大小是扰动或振动(横的)的傳播速度。公式(4)指出

$$a=\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \tag{19}$$

就是說，横振动的傳播速度与弦的密度的平方根成反比而与張力的平方根成正比。

上述的解(18)是正波 $\varphi(x-at)$ 与反波 $\varphi(x+at)$ 的算术平均值，它可以由下述方法得到：作出两个相同的当 $t=0$ 时弦的圖形 $u=\varphi(x)$ 的模样，想像它們彼此是重合在一起的，然后向两側以速度 a 移动。弦在时刻 t 的圖形就可以作为这样移动的两个圖形的算术平均值得出来，就是說，弦在时刻 t 的圖形平分諸縱标界于两

个移动的圖形之間的綫段。

例如，設在初始时刻，弦具有如圖 128 所示的形状。

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{在区間}(-\alpha,\ \alpha)\text{之外，}\\ x+\alpha & \text{当}-\alpha\leqslant x\leqslant 0\text{ 时，}\\ -x+\alpha & \text{当 }0\leqslant x\leqslant\alpha\text{ 时。}\end{cases}$$

圖 129 上表示出弦在下列时刻的圖形：

$$t=\frac{\alpha}{4a},\ \frac{2\alpha}{4a},\ \frac{3\alpha}{4a},\ \frac{\alpha}{a},\ \frac{5\alpha}{4a},\ \frac{2\alpha}{a}.$$

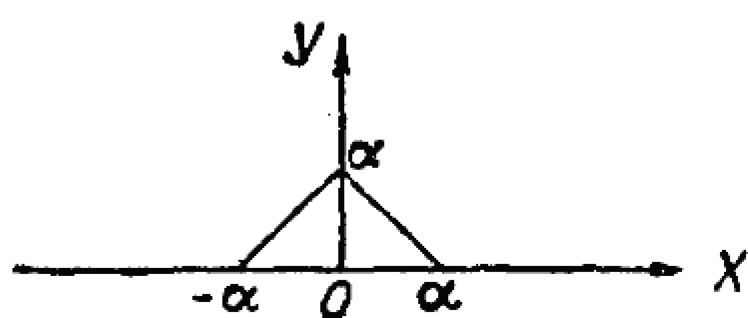


圖 128.

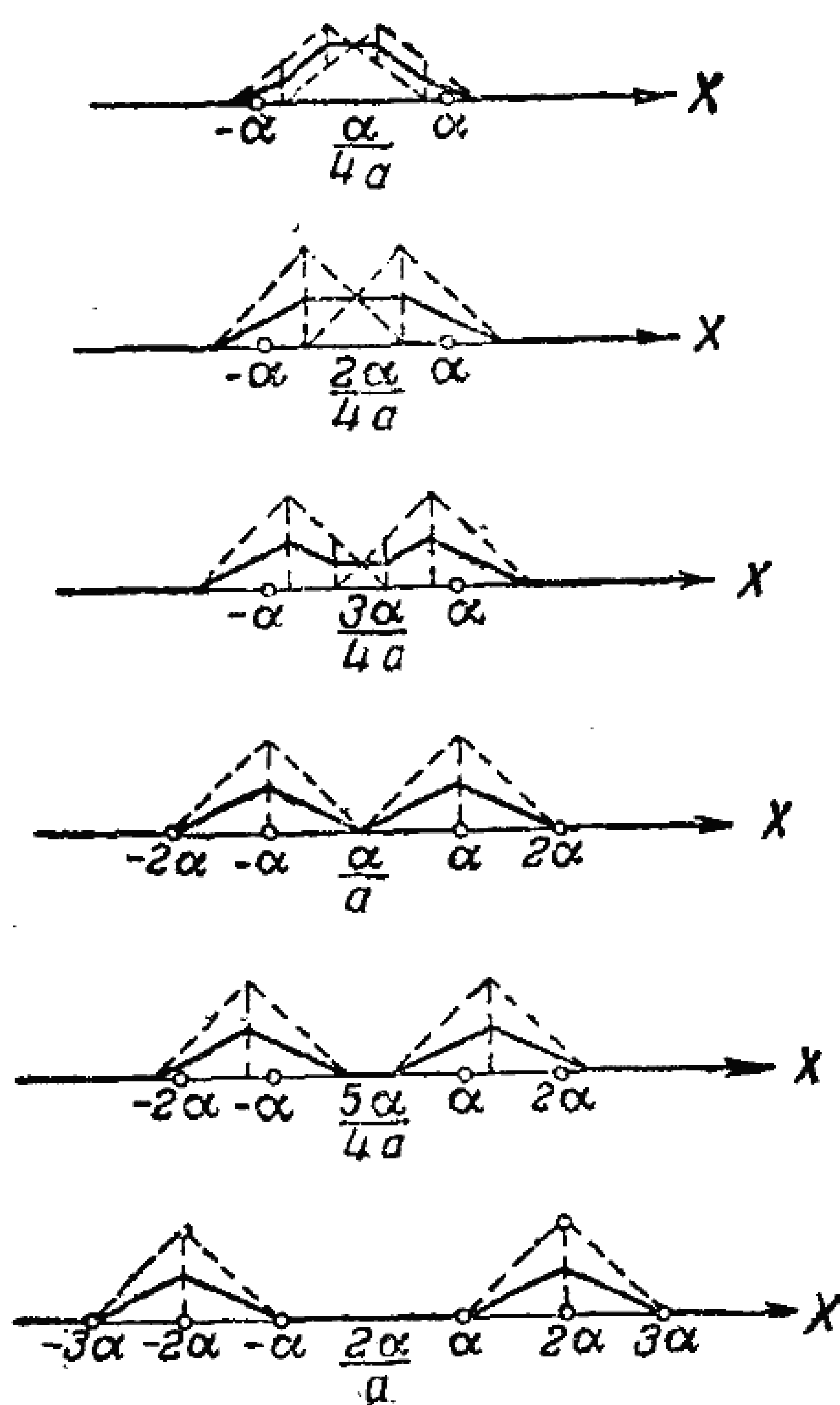


圖 129.

我們在平面上作出两条互相垂直的軸：一个是关于变量 x 的，另一个是关于 t 的。在圖 130 上我們只画出了一个 X 軸。这平面上任何一点由两个坐标 $(x,\ t)$ 确定，就是說，这样的点表現出在确定的时刻 t 弦上的确定的点 x。这时不难用画圖的方法确定出弦上那样的点，这些点的初始扰动在时刻 t_0 达到点 x_0。依照以上所述，这就是具有横坐标 $x_0\pm at_0$ 的点，因为 a 是振动的傳播速度。为要在 OX 軸上找出它們来，只須过点 $(x_0,\ t_0)$ 作两条直綫：

$$\left.\begin{aligned}x-at=x_0-at_0,\\ x+at=x_0+at_0,\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

它們与 OX 軸的交点就是所要求的点。直綫(20)叫做点(x_0, t_0)的特征綫。沿着其中第一条直綫 $\varphi(x-at)$ 保持常数値，就是說，对于由这直綫給出的那些値(x, t)来講，正波給出相同的离开距离，也就是对应于(x_0, t_0)这一对値的离开距离。对于反波来講，(20)中第二条直綫有同样的作用。簡單的可以說是，扰动沿着特征綫傳播。

应用上述的作法，可以發覺下述的事实。

設只在弦的某一个区間(α_1, α_2)上具有初始扰动(圖 130)，就是說，在这区間之外 $\varphi(x)=0$。我們限于上半个(x,t)平面$(t>0)$，

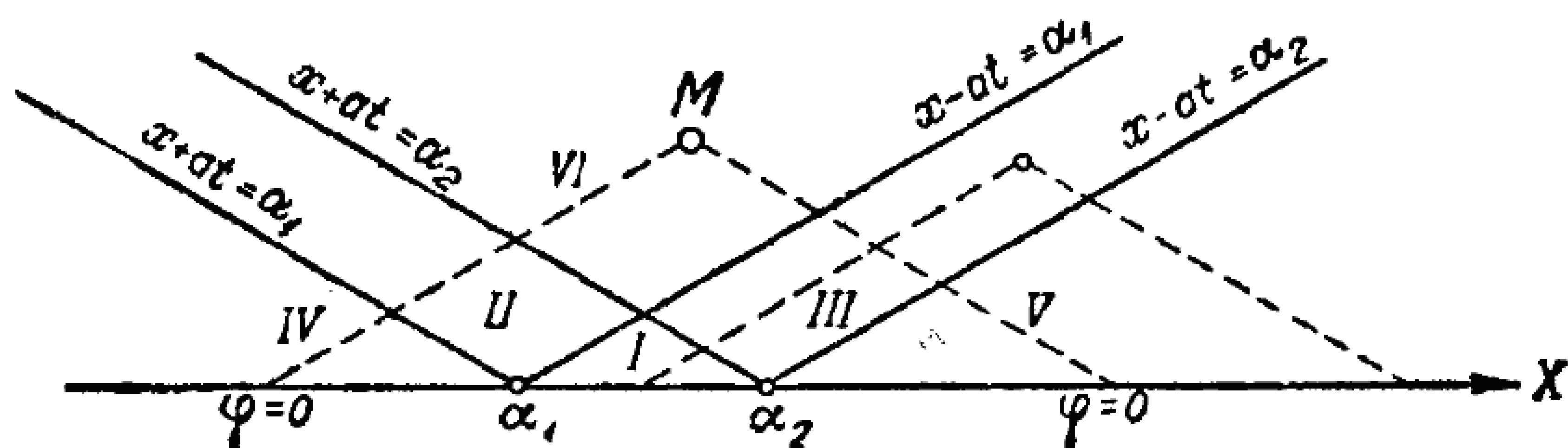


圖 130.

因为只有它才有物理意义，作出 OX 軸上的点 α_1 与 α_2 的特征綫，如圖上画的实綫。这些特征綫把整个上半平面分为六个区域。区域(I)所对应的点是这样的，在所指定的时刻正波与反波都要达到这些点。区域(II) 所对应的点在指定的时刻只是反波达到；区域(III)則相反，只是正波达到。区域(IV)与(V)所对应的点是这样的，在所指定的时刻，沒有扰动达到这些点。最后，区域(VI)所对应的点是这样的，扰动已經达到它們而且經过了它們，在所指定的时刻它們呈靜止状态。这是由于，如果过这个区域中随便那一点作特征綫，則它們与 OX 軸的交点 $x=c$ 落在有初始扰动的綫段之

外，于是 $\varphi(x\pm at)=\varphi(c)$等于零。此外，若过 M 作垂直于 OX 軸的直綫，則这直綫的下段，就是对应于 x 不变而时間提前的一段，至少通过区域(I)，(II)，(III)中之一，而这直綫的上段，就是对应于时間推后的一段，整个出現在区域(VI)中。以下我們将看到，弦所具有的这个値得注意的性質——波經过之后回到原来的状态——并非对于任何的初始扰动都是如此的。

2．初始位移等于零而只有初始冲量。

这时我們得到解

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)\,dz。\tag{21}$$

若用 $\Phi_1(x)$記函数 $\frac{1}{2a}\ \varphi_1(x)$的随意一个原函数，就得到：

$$u(x,\ t)=\Phi_1(x+at)-\Phi_1(x-at),\tag{22}$$

就是說，也是具有正波与反波的傳播的。如果初始扰动只限于在区間$(\alpha_1,\ \alpha_2)$之上，我們可以得到与情形1同样的作法，主要的区別是在区域(VI)中位移不是等于零而是由下面这积分来表达

$$\frac{1}{2a}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\varphi_1(z)\,dz。\tag{23}$$

实际上，依照区域(VI)的作法，对于这个区域来講，我們有 $x+at>\alpha_2$ 而 $x-at<\alpha_1$，就是說，在公式(21)中求积分所需要沿着的区間包含$(\alpha_1,\ \alpha_2)$在其内。不过依照条件，在$(\alpha_1,\ \alpha_2)$之外函数 $\varphi_1(z)$等于零，于是只剩下沿$(\alpha_1,\ \alpha_2)$的积分，因而对于$u(x,\ t)$我們就得到表达式(23)，它代表某一个常数。

如此，随着时間的变化，初始冲量的作用使得弦上的点移动一个綫段，这个綫段的長度由积分(23)表达，并在这新的位置保持不动。

还可以用下述的方法来解释公式(21)。設点 x 位于区間$(\alpha_1,\ \alpha_2)$之右，即 $x>\alpha_2$。当 $t=0$ 时，积分区間$(x-at,\ x+at)$退化成一

点 x，以后当 t 增加时，它以速度 a 向两側伸展。当 $t<\frac{x-\alpha_2}{a}$ 时，它与 (α_1, α_2) 沒有公共点，在其中函数 $\varphi_1(z)$ 等于零，于是公式(21)給出 $u(x, t)=0$，就是說，在点 x 是静止的。由时刻 $t=\frac{x-\alpha_2}{a}$ 开始，区間 $(x-at, x+at)$ 就重合在区間 (α_1, α_2) 上，在 (α_1, α_2) 上 $\varphi_1(z)$ 不等于零，于是点 x 开始振动（波的前陣面通过点 x 的时刻）。最后，当 $t>\frac{x-\alpha_1}{a}$ 时，区間 $(x-at, x+at)$ 就包含有整个的区間 (α_1, α_2)，沿区間 $(x-at, x+at)$ 求积分就化为沿区間 (α_1, α_2) 求积分，因为依照条件，在区間 (α_1, α_2) 之外 $\varphi_1(z)$ 等于零，就是說当 $t>\frac{x-\alpha_1}{a}$ 时，$u(x, t)$ 具有由表达式(23)所确定的常数値。时刻 $t=\frac{x-\alpha_1}{a}$ 是波的后陣面通过点 x 的时刻。

关于一般的情形我們作一些附注。我們提出，在一般情形下，正波或反波可以全部消失。实际上，例如，設在初始条件中出現的函数 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 滿足关系式：

$$\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)dz=0。 \tag{24}$$

这时，根据(16)中第二个公式，函数 $\theta_2(x)$ 就恒等于零，于是在一般解(12)中反波就消失了。如果我們在(24)的右边用一个常数来替代零，則 $\theta_2(x)$ 成为常数，而在公式(12)中这个常数項可以算在 $\theta_1(x-at)$ 中，就是說，也是沒有反波的。回到我們的情形 1 中所考慮的例。圖 128 給出初始离开距离的圖形（各处的初始速度都等于零）。圖 129 中最后一个給出在某一个时刻 $t=t_0$ 时弦的圖形，它是由各别的两段构成的。对应于区間 $(\alpha, 3\alpha)$ 的右边这一段以速度 a 向右移动，而左边那一段以速度 a 向左移动。不过我們可以用下述方法来描述当 $t>t_0$ 以后的現象：取时刻 $t=t_0$ 作为初始

时刻，計算出在这时刻的离开距离 u 与速度 $\frac{\partial u}{\partial t}$，并应用一般公式(17)，在其中只是右边需要用 $(t-t_0)$ 来替代 t，因为我們現在把 t_0 取作初始时刻。在这情形下，只是在区間 $(-3\alpha, -\alpha)$ 与 $(\alpha, 3\alpha)$ 上初始条件不等于零。在一般情形下，在这两个区間的每一个上，扰动給出正波和反波。不过在这里的情形下，如以上我們所看到的，在区間 $(\alpha, 3\alpha)$ 上(比方說)扰动只給出正波。这是由于，在这区間上，除去由圖 129 中最后一个所表示的离开距离外，当 $t=t_0$ 时振动的結果中也产生有速度，以使得反波消失。同理，在区間 $(-3\alpha, -\alpha)$ 上的扰动不給出正波。这种現象是吉金斯原理的构成之一。

166. 有界弦 設有两端固定住的有界的弦，并設弦的端点是 $x=0$ 与 $x=l$。

除初始条件(8)之外

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x);\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 是对于 $0<x<l$ 給定的，还需要滿足边值条件：

$$u\Big|_{x=0}=0;\ u\Big|_{x=l}=0。\tag{25}$$

达朗倍尔解(12)

$$u(x, t)=\theta_1(x-at)+\theta_2(x+at)\tag{12}$$

自然适用于这个情形，不过由公式(16)

$$\left.\begin{aligned}\theta_1(x)&=\frac{1}{2}\ \varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi_1(z)dz;\\ \theta_2(x)&=\frac{1}{2}\ \varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi_1(z)dz\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

来确定函数 θ_1 与 θ_2 在这里遇到了困难，依照問題的物理意义，函数 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 以至于 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$ 只是确定在区間 $(0, l)$ 上，而在公式(12)中变量 $(x\pm at)$ 可能位于这区間之外。

因而，为要可能应用特征綫的方法，就需要把函数 $\theta_1(x)$ 与

$\theta_2(x)$延續到区間$(0, l)$之外，与这完全相当的，是把函数$\varphi(x)$与$\varphi_1(x)$延續到区間$(0, l)$之外。从物理的观点来看，这个延續也就是确定一个无穷的弦的这样的扰动，使得它的一段$(0, l)$的运动，就像固定住它的两端而去掉弦的其余部分时一样。

在(12)的右边代入以$x=0$与$x=l$并讓結果等于零，就可以把边值条件表达成：

$$\left.\begin{array}{l}\theta_1(-at)+\theta_2(at)=0;\\ \theta_1(l-at)+\theta_2(l+at)=0,\end{array}\right\} \tag{27}$$

或者，簡單的用x来記变量at，

$$\left.\begin{array}{l}\theta_1(-x)=-\theta_2(x);\\ \theta_2(l+x)=-\theta_1(l-x)。\end{array}\right\} \tag{28}$$

当x在区間$(0, l)$上改变时，变量$(l-x)$也在这区間上改变，于是等式(28)的右边是已知的。不过这时变量$(-x)$与$(l+x)$分别在区間$(-l, 0)$与$(l, 2l)$上改变，于是(28)中第二个方程給出$\theta_2(x)$在区間$(l, 2l)$上的值，而第一个給出$\theta_1(x)$在区間$(-l, 0)$上的值。再者，当x在区間$(l, 2l)$上改变时变元$(l-x)$在区間$(-l, 0)$上改变，以上面的計算为基础，等式(28)的右边是已知的。这时变量$(-x)$与$(l+x)$各在区間$(-2l, -l)$与$(2l, 3l)$上改变，于是公式(28)給出$\theta_2(x)$在区間$(2l, 3l)$上的值以及$\theta_1(x)$在区間$(-2l, -l)$上的值。这样延續下去，我們相信，公式(28)給出函数$\theta_1(x)$当$x\leqslant 0$时的确定的值，以及$\theta_2(x)$当$x\geqslant l$时的确定的值，这就是$t>0$时我們应用公式(12)所需要的。同理，若x在区間$(-l, 0)$上改变，则公式(28)的左边已知，于是我們得到$\theta_2(x)$在区間$(-l, 0)$上的值以及$\theta_1(x)$在区間$(l, 2l)$上的值。然后，x在区間$(-2l, -l)$上改变，就得到$\theta_2(x)$在区間$(-2l, -l)$上的值以及$\theta_1(x)$在区間$(2l, 3l)$上的值等等，就是說，公式(28)給出当x取所有的实数值时$\theta_1(x)$与$\theta_2(x)$的确定的值。

如果我們在(28)的第二个方程中用$(l+x)$来替代x，并利用第一个方程，就得到：

$$\theta_2(x+2l)=-\theta_1(-x)=\theta_2(x),$$

这就表明函数$\theta_2(x)$以$2l$为周期。之后再由(28)中第一个方程可以說明函数$\theta_1(x)$也以$2l$为周期。由此推出，为要固定当x取所有的实值时$\theta_1(x)$与$\theta_2(x)$的值，只須作出上面所叙述的这两个函数的延續的第一步，就是只要x在区間$(0, l)$上改变。公式(28)給出$\theta_1(x)$在区間$(-l, 0)$上的值以及$\theta_2(x)$在区間$(l, 2l)$上的值，就是說，这就知道了$\theta_1(x)$在区間$(-l, +l)$上的值以及$\theta_2(x)$在区間$(0, 2l)$上的值。这两个函数的其余的值可以由它們的周期性得来。

用这样的方法确定了函数$\theta_1(x)$与$\theta_2(x)$，就不难延續函数$\varphi(x)$与$\varphi_1(x)$，因为根据方程(26)，我們有：

$$\varphi(x)=\theta_1(x)+\theta_2(x);\quad \frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz=\theta_2(x)-\theta_1(x),$$

就是說

$$\varphi_1(x)=a[\theta_2'(x)-\theta_1'(x)]。$$

在(28)的第一个方程中用$(-x)$来替代x，并求导数，就得到：

$$\theta_1(x)=-\theta_2(-x);\quad \theta_1'(-x)=\theta_2'(x);\quad \theta_1'(x)=\theta_2'(-x)。$$

利用这些关系式以及(28)中第一个方程，可以写出：

$$\varphi(-x)=\theta_1(-x)+\theta_2(-x)=-\theta_2(x)-\theta_1(x)=-\varphi(x),$$

$$\varphi_1(-x)=a[\theta_2'(-x)-\theta_1'(-x)]=a[\theta_1'(x)-\theta_2'(x)]=-\varphi_1(x),$$

就是說，对于$\varphi(x)$与$\varphi_1(x)$我們得到非常簡單的延續規律：它們依照奇函数的規律由区間$(0, l)$延續到区間$(-l, 0)$，然后以$2l$为周期繼續延續。如果这时我們在整个x軸得到函数$\varphi(x)$和$\varphi_1(x)$，使得$\varphi(x)$有連續导数$\varphi'(x)$和$\varphi''(x)$，而$\varphi_1(x)$有連續导数$\varphi_1'(x)$，那么，根据公式(17)，我們的問題就有两次連續可微的解。

我們再回到xt平面，由于弦是有界的，我們只須考虑上半平

面 $t>0$ 的界于直綫 $x=0$ 与 $x=l$ 之間的一竪条(圖 131)。如上所述,已經对于 x 的所有的值确定了函数 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$,現在我們来看解(12)的物理意义。过点 O 与点 L 作特征綫直到与竪条的对边相遇,再过所得到的交点作特征綫直到与对边相遇,如此作下去。

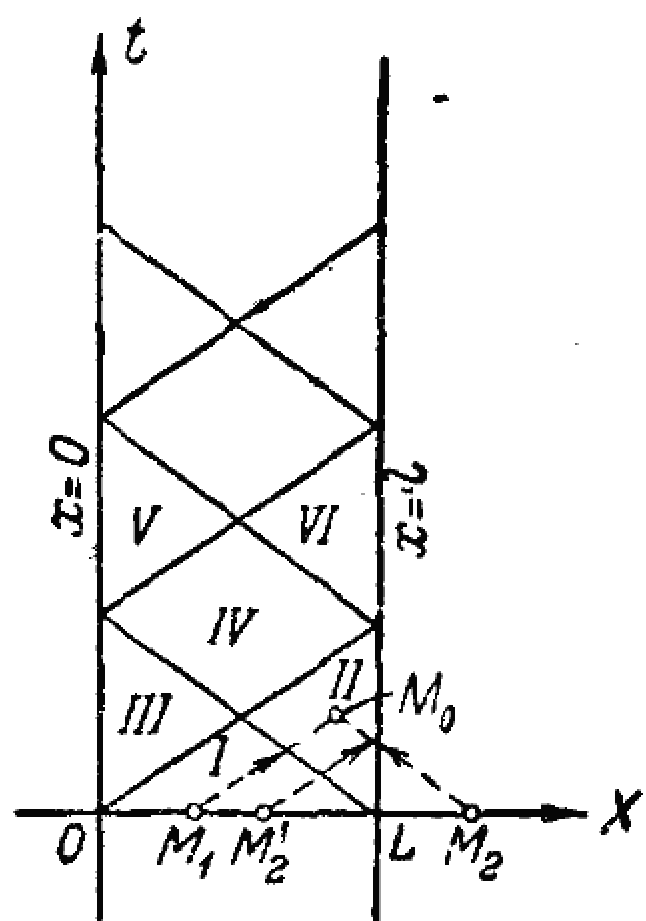


圖 131.

这样就把这竪条分为区域(I),(II),(III),…。区域(I)中的点对应于弦上那样的点,对于这些点来講,只是內点的扰动来得及达到这些点,而虛构的弦的无穷部分的补充扰动对于运动沒有影响。在区域(I)以外的点,就有由弦的虛构部分傳来的扰动;例如,我們取区域(II)中一个点 $M_0(x_0, t_0)$。

由于 $$u(x_0, t_0)=\theta_1(x_0-at_0)+\theta_2(x_0+at_0),$$

于是在这点就有两个波:一个是由横坐标为 $x=x_0-at_0$ 的点 M_1 的初始扰动傳来的正波,另一个是由横坐标为 $x=x_0+at_0$ 的点 M_2 傳来的反波,这里,在所給的情形下,M_1 是在区間 $(0, l)$ 中的眞实的点,M_2 是虛构的点。不难用眞实的点来替代 M_2,注意,根据(28):

$$\theta_2(x_0+at_0)=\theta_2(l+x_0+at_0-l)=-\theta_1(2l-x_0-at_0),$$

如此,反波 $\theta_2(x_0+at_0)$ 也恰好像点 $M_2'(2l-x_0-at_0)$ 的初始扰动的正波 $-\theta_1(2l-x_0-at_0)$(对于点 L 来講,M_2' 是 M_2 的对称点),在时刻

$$t=\frac{l-(2l-x_0-at_0)}{a}=\frac{x_0+at_0-l}{a},$$

它达到弦的端点 L,然后改变成相反的方向并改变了符号,而在时刻 t_0 它以这样的形状达到点 M_0。換句話說,固定住的端点 $x=l$

的作用产生位移波的反射，使得位移的符号改变而保持它的絕对大小。

对于达到端点 $x=0$ 的波，我們会發覺到有同样的現象；在区域(III)的点就有两个波：反波及由端点 $x=0$ 反射来的正波。在区域(IV)，(V)，(VI)，…的点，我們所得到的波是由弦的两个端点經过几次这样的反射而来的。

如果替代(25)中的第二个条件，例如，我們在端点 $x=l$ 有条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0^{①},$$

則替代(27)中第二个方程我們就得到：

$$\theta_1'(l-at)+\theta_2'(l+at)=0,$$

或者再用 x 来替换 at，

$$\theta_2'(l+x)=-\theta_1'(l-x)。$$

由这关系式求积分，显然就有

$$\theta_2(l+x)=\theta_1(l-x)+C,$$

其中 C 是某一个常数，我們可以算作它等于零，这并不失去普遍性，讀者可以自己驗明。如此，我們就有

$$\theta_2(l+x)=\theta_1(l-x)。\tag{29}$$

这个条件的物理意义也归結于由端点 $x=l$ 的反射，不过要保持位移的符号以及大小。

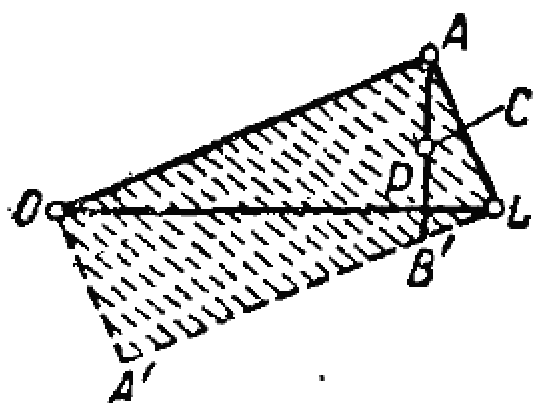


圖 132.

我們講一个应用以上所討論的特征綫与反射的方法的特别簡單的例："拉起的弦"，在初始时刻它的一个点被拉开而沒有初始速度。讀者不难証明，用下述的精致方法，可以由弦的初始形象确定出弦在任何时刻 t 的形象。

圖 132 上的綫 OAL 表示弦的初始形象，虛綫表

① 在椼軸的縱振动理論中会遇到这样的条件。这种振动服从同样的微分方程(5)或(6)，但常数 a 具有另外的物理意义，而上述条件意味着椼軸的端点是自由的。

示对于弦的中点 $x=\frac{l}{2}$ 来講的对称形象。作 OL 的垂綫 AP 直到与直綫 $A'L$ 的交点 B'，求綫段 AB' 的中点 C，如此，我們确定出方向 LC。

如果我們由点 A 向点 A' 平行于方向 LC 移动割綫，就得到弦在任何时刻的形象；特别是，在时刻 $\tau=\frac{l}{a}$ 弦取虛折綫 $OA'L$ 的位置。

圖 133 上表示出在下列各时刻，弦的一系列的形象：

$$0, \frac{1}{4}\tau, \frac{1}{2}\tau, \frac{3}{4}\tau, \tau。$$

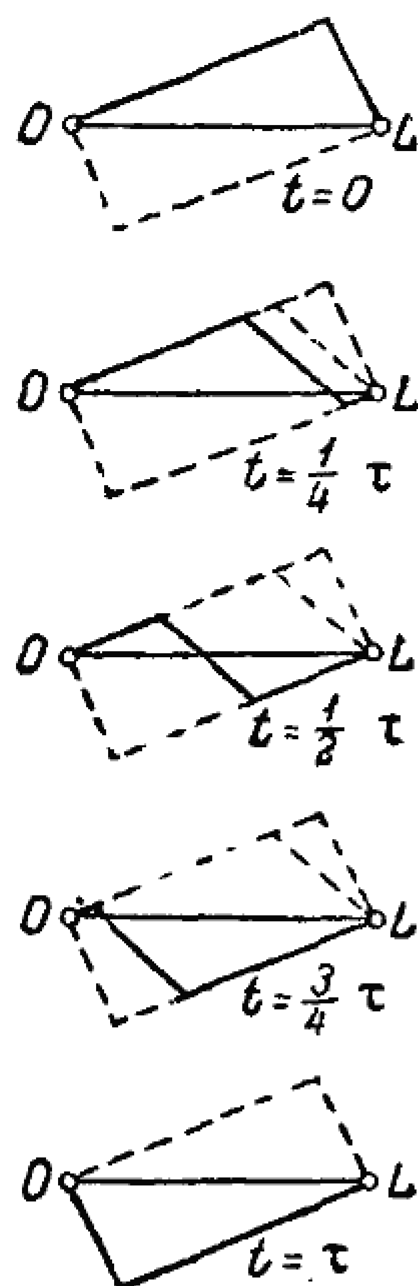


圖 133.

167. 富里埃法 端点固定住的弦的横振动也可以借助于富里埃級数来解釋，虽然在这特殊情形下这个方法不如以上所講的方法簡單，但是我們还要叙述它，因为在許多別的情形中，不能应用特征綫的方法，而可以应用这个方法。我們把这問題的方程按另一次序再写一次：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{30}$$

$$u\Big|_{x=0}=0, \quad u\Big|_{x=l}=0, \tag{31}$$

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x);\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x)。 \tag{32}$$

替代求方程 (30) 的一般解，我們将求它的特解，且假定其形状为两个函数的乘积，其中一个函数只依賴于 t，另一个只依賴于 x：

$$u=T(t)X(x)。 \tag{33}$$

代入到(30)中，我們有：

$$X(x)T''(t)=a^2T(t)X''(x)$$

或

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}。$$

在所得到的方程的左边的函数只依賴于 t，右边只依賴于 x，在这情形下只是当左右两边都既不依賴于 t 也不依賴于 x 时才可

能相等，就是說，两边都代表的是同一个常数。

我們用$(-k^2)$来記这个常数：

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-k^2, \tag{34}$$

由此得到两个方程

$$X''(x)+k^2X(x)=0;\quad T''(t)+a^2k^2T(t)=0。 \tag{35}$$

在$k\neq0$时这两个方程的一般积分是[**27**]：

$$X(x)=C\cos kx+D\sin kx;\quad T(t)=A\cos akt+B\sin akt,$$

其中A, B, C, D是任意常数。

依照(33)，关于u我們得到：

$$u=(A\cos akt+B\sin akt)(C\cos kx+D\sin kx)。 \tag{36}$$

現在我們来选擇常数，使得适合边値条件(31)，就是說，使得当$x=0$与$x=l$时表达式(36)中含x的因子等于零。

这就給出：

$$C\cdot1+D\cdot0=0;\quad C\cos kl+D\sin kl=0。$$

由第一个方程推知$C=0$，于是第二个給出$D\sin kl=0$。若算作$D=0$，則根据$C=D=0$，解(36)就恒等于零。我們对于这样的解沒有兴趣。所以我們应当算作$D\neq0$，而$\sin kl=0$。

如此我們得到用以确定参变数k的方程，直到現在为止k仍然保持完全任意的①：

$$\sin kl=0,$$

就是說

$$k=0,\ \pm\frac{\pi}{l},\ \pm\frac{2\pi}{l},\ \cdots,\ \pm\frac{n\pi}{l},\ \cdots。 \tag{37}$$

---

① 如果我們在方程(34)中用$(+k^2)$来記常数以替代$(-k^2)$，則得到$X(x)=Ce^{kx}+De^{-kx}$，于是总不可能适合边値条件(31)。

在$k=0$时同样情形也成立。对于以后我們将应用富里埃法的問題都要用与这类似的附注。

若在(36)中代入以 $k=\frac{n\pi}{l}$ 或 $k=-\frac{n\pi}{l}$,则只是正弦的符号不同，由于具有任意常数因子，这两个解实質上是同样的。如此，由关于 k 的值(37)中我們只須取正值。在公式(36)中讓 $C=0$, 并用 A 与 B 来記任意常数 AD 与 BD, 就得到:

$$u=(A\cos akt+B\sin akt)\sin kx。$$

这里应当用(37)中一个值代入作 k。用不同的值代入作 k 时，我們可以算作常数 A, B 也是不同的。如此,我們得到无穷多的解:

$$u_n=\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)。\tag{38}$$

这些解满足方程(30)以及边值条件(31)。現在我們提出，方程(30)与(31)具有綫性以及齐次性,如果我們有满足它們的解 u_1, u_2, …, 則这些解的和也满足它們(就像对于齐次綫性常微分方程的情形类似)。如此,我們就有方程(30)与(31)的下面形状的解:

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}。\tag{39}$$

剩下要选擇常数 A_n 与 B_n 使得满足初始条件(32)，求出解(39)对 t 的导数:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n\pi a}{l}A_n\sin\frac{n\pi at}{l}+\right.$$
$$\left.+\frac{n\pi a}{l}B_n\cos\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}。\tag{40}$$

在(39)与(40)中代入以 $t=0$, 根据(32),我們得到:

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l};\quad \varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}。\tag{41}$$

所写的級数恰好代表給定的函数 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 在区間 $(0,\ l)$ 上依正弦的展开式。这样的展开式的系数是由我們在 [**146**] 中已知的公式来确定的,这就給出下列的 A_n 与 B_n 的值:

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(z)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz;\ B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l \varphi_1(z)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz。\quad(42)$$

把这些值代入到公式(39)，就得到形式地满足所有提到的条件的級数。$\varphi(x)$与$\varphi_1(x)$应满足什么充分条件，才能使(39)的和确实給出所考虑的問題的解，这个我們将在下面再講。

168. 調和素与駐波　引用調和振动的振幅N_n与初相φ_n:

$$A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}=N_n\sin\left(\frac{n\pi at}{l}+\varphi_n\right)。$$

給出問題之解的級数(39)中每一項

$$\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}=$$

$$=N_n\sin\left(\frac{n\pi at}{l}+\varphi_n\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\quad(43)$$

代表一个所謂的駐波，这时弦上的点实行調和振动的运动，相相同而振幅

$$N_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

依賴于这个点的位置。当这样振动时，弦發出声，它的調依賴于振动的頻率

$$\omega_n=\frac{n\pi a}{l},\quad(44)$$

而强度依賴于振动的最大振幅N_n。給n以值1, 2, 3, …，我們就得到弦的基本音以及一系列相繼的泛音，它們的頻率或每秒內的振动数与自然数串1, 2, 3, …的項成正比。对于n的某些值，振幅$N_n\sin\frac{n\pi x}{l}$可能是負的。可以取它的絕对值，这只要給相加π就成。

解(39)，就是弦發出的声，是由分音或調和素集成的；它們的振幅，也就涉及它們对弦所發出的声的影响，通常是当調和素的番号愈大时振幅愈小，全部它們的作用归結于声的音色的构成，对于

不同的乐器，音色是不同的，这可以由这些泛音的存在来解释。

在点

$$x=0,\ \frac{l}{n},\ \frac{2l}{n},\ \cdots,\ \frac{(n-1)l}{n},\ l \qquad (45)$$

第 n 調和素的振动振幅等于零，因为在这些点 $\sin\frac{n\pi x}{l}=0$，点(45)叫做第 n 調和素的节点。此外在点

$$x=\frac{l}{2n},\ \frac{3l}{2n},\ \cdots,\ \frac{(2n-1)l}{2n} \qquad (45_1)$$

第 n 調和素的振动振幅达到最大值，因为在这些点函数 $\sin\frac{n\pi x}{l}$ 有最大的絕对值，点(45_1)叫做第 n 調和素的腹。这里，弦振动的情形，就好像它是由互不連接的 n 个各别的段組成的，而固定在各个的約制的节点。如果我們把弦在中間点压住，就是說，在基本音的腹点压住，則不只这个音的振幅成为零，而所有其他的以这个点为腹点的音的振幅都成为零，就是說，第三，第五，……調和素的振幅都等于零，相反地，对于偶数的調和素，在压住的点是节点，就沒有这种現象，于是弦就不發出基本音，而發出它的八度音，就是在每秒內振动数为基本音的两倍的声音。

以上所叙述的方法与特征綫法不同，这叫做駐波法；通常它也叫做富里埃法。

不难發覚級数(39)所代表的解与以上在 [**166**] 中求得的解完全恒等。为了这个目的，首先我們提出，在[**166**]中我們指出过，应用达朗倍尔公式(16)于有界弦时，需要把給定在区間$(0,\ l)$上的函数 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 依照奇函数的性質延續到区間$(-l,\ 0)$上，然后再以 $2l$ 为周期延續。不过，这样的延續方法完全相当于把这函数展开为只依正弦的富里埃級数[**145**]，就是說，完全相当于 x 取任何値的公式(41)。把 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 的这两个表达式代入到达朗倍尔公式(17)中，不难看到，这就引至解(39)：

$$u=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left[\sin\frac{n\pi(x-at)}{l}+\sin\frac{n\pi(x+at)}{l}\right]+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}B_n\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz$$

或

$$u=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left[\sin\frac{n\pi(x-at)}{l}+\sin\frac{n\pi(x+at)}{l}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left[\cos\frac{n\pi(x-at)}{l}-\cos\frac{n\pi(x+at)}{l}\right],$$

由此直接推出(39)。

在这情形下，与特征綫法比較起来，富里埃法有些缺陷，就是級数(39)时常收斂得很慢，于是不只是計算时不方便，而且严格証明这級数实际是解时也不方便，因为这时必得把它逐項求导数两次，而在第 n 項中引入 n^2 这个因子。至于未知函数对于初始条件給定的函数的依賴性，从外表来看，由級数(39)所表达的比由特征綫方法所确定的这种依賴性复杂得多。可是富里埃方法揭露出很重要的情况，这就是弦的无穷多个各别的本質的調和振动的存在，而它的一般振动就是由这些各别振动集成的。

注意到[**166**]中所說的，可以断定，級数(39)的和将給出我們的問題的具有到二阶的連續导数的解，只要函数 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 具有在[**166**]中所說的性質。如果函数 $\varphi(x)$ 具有到三阶的連續导数且滿足条件 $\varphi(0)=\varphi''(0)=\varphi(l)=\varphi''(l)=0$，而 $\varphi_1(x)$ 具有到二阶的連續导数且 $\varphi_1(0)=\varphi_1(l)=0$，則可以証明，級数(39)可以对 x 和 t 求导数两次。还可以減少对初始条件的假設而研究波动方程，关于它将在第四卷里講。以后在应用富里埃方法时，我們不詳述使得所得到的級数确实給出問題的解的那些条件。到第四卷里我們再講富里埃方法的一般观点。这里的討論，目的只是指出解法及由此可得到的一套工具。我們还要指出，由在[**164**]中所进行的討論和[**166**]中的特征綫方法，直接推出，无論对于无界还是有

界弦，上面給出的問題的解都是唯一的。以后我們再講一般波动方程的解的唯一性問題。

169　强迫振动　在[163]中，我們介紹过，在对于單位長来講的力 $F(x, t)$ 的作用下弦的强迫振动的方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x, t)\quad\left[f(x, t)=\frac{1}{\rho}F(x, t)\right]。\tag{46}$$

对于这个方程应当还有边值条件(固定住的弦的情形)与初始条件

$$u\Big|_{x=0}=0;\qquad u\Big|_{x=l}=0,\tag{47}$$

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x);\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x)。\tag{48}$$

这些强迫振动的一般形式可以看作是由两个振动的运动組成的結果，其中一个是純强迫振动，就是在力 F 的作用下完成的这样的振动，这时算作在初始时刻弦在静止状态不动，另一个是自由振动，它是沒有作用力时，只由于初始扰动的存在，弦所完成的振动。这就引导我們援用两个新的函数 v 与 w，依照公式

$$u=v+w$$

来替代 u，其中 v 滿足条件

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f(x, t),\tag{49}$$

$$v\Big|_{x=0}=0;\qquad v\Big|_{x=l}=0,\tag{50}$$

$$v\Big|_{t=0}=0;\quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\tag{51}$$

它給出純强迫振动，而函数 w 滿足条件

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$w\Big|_{x=0}=0;\qquad w\Big|_{x=l}=0,$$

$$w\Big|_{t=0}=\varphi(x);\quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x),$$

它給出自由振动。作出和 $u=v+w$，我們不难驗証，它給出这个問題的解，就是方程(46)，(47)与(48)的解。

自由振动 w 的求法在前一段中我們已經講过，于是只剩下要求函数 v。像在自由振动的情形一样，我們把未知函数写成級数的形状：

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},\tag{52}$$

于是它本身满足条件(50)，而函数 $T_n(t)$ 自然与我們在[**167**]中所求得的不同，因为方程(49)不是齐次的。

把級数(52)代入到方程(49)中，我們得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)\sin\frac{n\pi x}{l}=-a^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{l}+f(x,t),$$

由此，用[**168**]的(44)中的 ω_n 替换 $\frac{an\pi}{l}$，

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+\omega_n^2T_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}。\tag{53}$$

把函数 $f(x,t)$ 考虑作 x 的函数，可以把它在区間 $0\leqslant x\leqslant l$ 上展开成下面形状的富里埃級数：

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},\tag{54}$$

它的系数 $f_n(t)$ 由如下依赖于 t 的公式确定

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(z,t)\sin\frac{n\pi z}{l}dz。\tag{55}$$

比較对于同一个函数 $f(x,t)$ 的展开式(53)与(54)，我們就得确定函数 $T_1(t)$，$T_2(t)$，…的一串方程

$$T_n''(t)+\omega_n^2T_n(t)=f_n(t)\quad(n=1,2,\cdots)。\tag{56}$$

对于这样确定的 $T_n(t)$，函数(52)满足微分方程(49)以及边值条件(50)。为要也满足剩下的初始条件(51)，只須函数 $T_n(t)$ 受这

个条件的約制，就是說，規定

$$T_n(0)=0,\quad T'_n(0)=0, \tag{57}$$

因为这时显然

$$v\Big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}T'_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=0。$$

方程(56)的滿足条件(57)的解我們在 [28] 中已經講过，由此不难引出：

$$T_n(t)=\frac{1}{\omega_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau,$$

或者，代入以关于 $f_n(\tau)$ 的表达式(55)：

$$T_n(t)=\frac{2}{l\omega_n}\int_0^t d\tau\int_0^l f(z,\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\sin\frac{n\pi z}{l}dz。 \tag{58}$$

把这个代入到(52)中，就得到 $v(x,t)$ 的表达式。不难証明，如果 $f(x,t)$ 有到二阶的連續导数，且 $f(0,t)=f(l,t)=0$，則級数(52)的和是問題的解即方程(49)，(50)和(51)的解。

到現在为止，我們討論过了在初始条件中（屬于函数 w 的）或是在微分方程中（屬于函数 v 的）的非齐次性。当然也要討論在边值条件中的非齐次性。算作方程与初始条件都是齐次的并且仍然用字母 u 来記未知函数，就得到下面的問題：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

$$u\Big|_{x=0}=\omega(t);$$

$$u\Big|_{x=l}=\omega_1(t);$$

$$u\Big|_{t=0}=\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0。$$

在第四卷中我們再考慮这个在边值条件中的非齐次性的情形。

170. 集中的力 我們現在对于集中在一点 $C(x=c)$ 的力，来討論公式(58)。我們不像在[**163**]中所作的那样，把这个力的大小記作 P，而把它記作 ρP。像在[**163**]中已經講过的一样，这个情形可以看成是下述情形的極限情形：力 F 只作用在微小区間 $(c-\delta, c+\delta)$ 上，而在这区間之外它等于零，并且当 $\delta\to 0$ 时全部力的大小

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} F(z, t)dz\to\rho P(t)。$$

依照公式(4)我們有，当 $\delta\to 0$ 时

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(z, t)dz\to P(t)。$$

注意，依照条件，在区間 $c-\delta\leqslant z\leqslant c+\delta$ 之外 $f(z, t)$ 等于零，再利用第一中值定理[**I**, 95]，并且假定 $f(z, t)$ 在区間

$$c-\delta\leqslant z\leqslant c+\delta$$

上不变号，就得到：

$$\int_0^l f(z, t)\sin\frac{n\pi z}{l}dz=\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(z, t)\sin\frac{n\pi z}{l}dz=$$

$$=\sin\frac{n\pi\zeta}{l}\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(z, t)dz,$$

其中 ζ 是区間 $(c-\delta, c+\delta)$ 上的某一个值。

取極限，当 $\delta\to 0$ 时

$$\int_0^l f(z, t)\sin\frac{n\pi z}{l}dz\to P(t)\sin\frac{n\pi c}{l},$$

这时 $T_n(t)$ 要确定作为在(58)的右边的表达式当 $\delta\to 0$ 时的極限，于是它成为

$$T_n(t)=\frac{2}{l\omega_n}\sin\frac{n\pi c}{l}\int_0^t P(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau,$$

因而强迫振动就由下面这公式确定：

$$v(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l\omega_n}\sin\frac{n\pi c}{l}\int_0^t P(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}。\tag{59}$$

这个公式指出，在强迫振动中可能消失一些泛音，对于那些泛音

$$\sin\frac{n\pi c}{l}=0,$$

就是在力的作用点 C 有节点的那些泛音。

現在講調和的振动的强迫力的情形，这时需要规定：

$$P(t)=P_0\sin(\omega t+\varphi_0),$$

或者，为簡單起見，算作相 $\varphi_0=0$：

$$P(t)=P_0\sin\omega t。$$

这时，关于 $T_n(t)$ 的公式給出：

$$T_n(t)=\frac{P_0}{l\omega_n}\sin\frac{n\pi c}{l}\int_0^t 2\sin\omega\tau\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=-\frac{P_0}{l\omega_n}\sin\frac{n\pi c}{l}\int_0^t\{\cos[\omega_n t-(\omega_n-\omega)\tau]-\cos[\omega_n t-(\omega_n+\omega)\tau]\}d\tau=$$

$$=\frac{-2\omega P_0}{l\omega_n(\omega_n^2-\omega^2)}\sin\frac{n\pi c}{l}\sin\omega_n t+\frac{2P_0}{l(\omega_n^2-\omega^2)}\sin\frac{n\pi c}{l}\sin\omega t。$$

如果强迫力的頻率 ω 不与自由振动的頻率 ω_n 中任何一个相同，則所有的分母 $(\omega_n^2-\omega^2)$ 都不等于零；不过如果 ω 接近頻率 ω_n 中的一个，則对应的分母減小，于是 $T_n(t)$ 对应的一項与其他的項比較起来就是很大的，就是說，發生共振現象。最后，若 $\omega=\omega_n$，則上面关于 $T_n(t)$ 的表达式就失去了意义，而应当換成另外的。

把所得到的 $T_n(t)$ 的表达式代入到公式(52)中，就有：

$$v(x,t)=\frac{-2\omega P_0}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\frac{\sin\frac{n\pi c}{l}}{\omega_n^2-\omega^2}\sin\omega_n t\sin\frac{n\pi x}{l}+$$

$$+\frac{2P_0}{l}\sin\omega t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi c}{l}}{\omega_n^2-\omega^2}\sin\frac{n\pi x}{l}。$$

右边的第一項具有自由振动的形状，第二項与强迫力有相同的頻率。去掉关于自由振动 $\omega(x,t)$ 的第一項，只取第二項，把它記作 $V(x,t)$：

$$V(x,t)=\frac{2P_0}{l}\sin\omega t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi c}{l}}{\omega_n^2-\omega^2}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

或者，规定 $\alpha^2=\frac{\omega^2l^2}{a^2\pi^2}$：

$$V(x,t)=\frac{2P_0 l}{a^2\pi^2}\sin\omega t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi c}{l}}{n^2-\alpha^2}\sin\frac{n\pi x}{l}。\tag{60}$$

和数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi c}{l}}{n^2-\alpha^2}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

可以依照在[159]中所講的方法来計算，不过我們現在不作这个，而講这个問題的另一个解法，即不把集中的力考虑作連續分布的情形的極限，而直接来作。

力的作用点把弦分为两段 $(0,c)$ 和 (c,l)。我們分別考虑这两段，第一段的縱标記

作 $u_1(x, t)$，第二段的記作 $u_2(x, t)$。对于这两个函数 u_1 与 u_2，我們得到下列的方程：

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad (0<x<c); \tag{61}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad (c<x<c), \tag{61$_1$}$$

因为在区間$(0, c)$与(c, l)內沒有外力。再者，我們有固定端点的条件：

$$u_1\Big|_{x=0}=0, \quad u_2\Big|_{x=l}=0, \tag{62}$$

在点 $x=c$ 弦的連續性条件：

$$u_1\Big|_{x=c}=u_2\Big|_{x=c}, \tag{63}$$

以及作用在点 $x=c$ 的力的平衡条件[163]：

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=c}-\frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=c}=-\frac{\rho}{T_0}P(t)=-\frac{1}{a^2}P(t)\text{①}。 \tag{64}$$

我們只限于考虑調和力的情形

$$P(t)=P_0\sin\omega t,$$

从由它所引起的强迫振动中分出具有同样周期 ω 的振动。这些振动要由下面的形状来求：

$$u(x, t)=X(x)\sin\omega t,$$

不过，其中的函数 $X(x)$在区間$(0, c)$ 与 (c, l)上应当有不同的表达式，由于这个緣故我們設：

$$u_1=X_1(x)\sin\omega t; \quad u_2=X_2(x)\sin\omega t。 \tag{65}$$

把它們代入到方程(61)与(61_1)中，我們就有：

$$-\omega^2\sin\omega t X_1(x)=a^2X_1''(x)\sin\omega t,$$

由此
$$X_1''(x)+\frac{\omega^2}{a^2}X_1(x)=0,$$

类似的
$$X_2''(x)+\frac{\omega^2}{a^2}X_2(x)=0。$$

根据[27]，这就給出：

$$X_1(x)=C_1'\cos\frac{\omega}{a}x+C_2'\sin\frac{\omega}{a}x; \quad X_2(x)=C_1''\cos\frac{\omega}{a}x+C_2''\sin\frac{\omega}{a}x。$$

由条件(62)求得：

$$C_1'=0, \quad C_1''\cos\frac{\omega l}{a}+C_2''\sin\frac{\omega l}{a}=0,$$

---

① 在[163]的公式(7)中，用我們現在的記法，应当写成 $\rho P(t)$ 来替代 P，$\frac{\partial u_2}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ 来替代 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+$ 与 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_-$。

由此推知，可以設：

$$C_1''=C_2\sin\frac{\omega l}{a},\quad C_2''=-C_2\cos\frac{\omega l}{a},$$

其中 C_2 是任意常数。为对称起見，我們把任意常数 C_2' 記作 C_1，于是得到：

$$X_1(x)=C_1\sin\frac{\omega x}{a},\quad X_2(x)=C_2\sin\frac{\omega(l-x)}{a}。$$

这时，連續性条件(63)給出：

$$C_1\sin\frac{\omega c}{a}\sin\omega t=C_2\sin\frac{\omega(l-c)}{a}\sin\omega t。$$

只剩下要适合最后的条件(64)，由它得到：

$$-\frac{\omega}{a}C_2\cos\frac{\omega(l-c)}{a}\sin\omega t-\frac{\omega}{a}C_1\cos\frac{\omega c}{a}\sin\omega t=-\frac{P_0}{a^2}\sin\omega t。$$

于是常数 C_1 与 C_2 由下列的方程組来确定：

$$C_1\sin\frac{\omega c}{a}-C_2\sin\frac{\omega(l-c)}{a}=0;\quad C_1\cos\frac{\omega c}{a}+C_2\cos\frac{\omega(l-c)}{a}=\frac{P_0}{a\omega},$$

經过簡單的計算求得

$$C_1=\frac{P_0}{a\omega}\frac{\sin\frac{\omega(l-c)}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}};\quad C_2=\frac{P_0}{a\omega}\frac{\sin\frac{\omega c}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}},$$

于是公式(65)給出問題的解，形状如下：

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{P_0}{a\omega}\dfrac{\sin\frac{\omega(l-c)}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\dfrac{\omega x}{a}\sin\omega t, & \text{当 } 0<x<c \text{ 时},\\[2ex] \dfrac{P_0}{a\omega}\dfrac{\sin\frac{\omega c}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\dfrac{\omega(l-x)}{a}\sin\omega t, & \text{当 } c<x<l \text{ 时}。\end{cases}\tag{66}$$

把(66)展开为只依正弦的富里埃級数，讀者不难驗証关于 $V(x,t)$ 的解(60)与(66)的恒等性。

171. 卜阿桑公式　比照着无界弦的情形，我們現在講一般的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\tag{67}$$

当具有給定的初始条件时在无界空間中的解法。先講一个輔助的命題。为了以后的公式写起来方便，我們用 (x_1, x_2, x_3) 来記坐标

(x, y, z)。設 $\omega(x_1, x_2, x_3)$ 是某一个区域上或整个空間上連續且有直到二阶連續导数的任意函数。以下我們所有的討論都是对于这个区域講的。我們考虑函数 ω 在球面 $C_r(x_1, x_2, x_3)$ 上的值，这个球以点 (x_1, x_2, x_3) 为心而以 r 为半徑。这个球面上的点的坐标可以由下式表达：

$$\xi_1 = x_1 + \alpha_1 r;\ \xi_2 = x_2 + \alpha_2 r;\ \xi_3 = x_3 + \alpha_3 r,$$

其中 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是所說的球的半徑的方向余弦。可以把它們写成下面的形状：

$$\alpha_1 = \sin\theta\cos\varphi;\ \alpha_2 = \sin\theta\sin\varphi;\ \alpha_3 = \cos\theta,$$

这里角度 θ 由 0 改变到 π 而角度 φ 由 0 改变到 2π。用 $d_1\sigma$ 来記半徑为 1 的球面上的面积單元，用 $d_r\sigma$ 来記半徑为 r 的球面上的面积單元：

$$d_1\sigma = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi;\quad d_r\sigma = r^2 d_1\sigma = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi。$$

考虑函数 ω 沿球面 $C_r(x_1, x_2, x_3)$ 的算术平均值，就是函数 $\omega(x_1, x_2, x_3)$ 沿上述球面的积分除以这球面的面积。显然，这个积分的大小依赖于所选擇的球心 (x_1, x_2, x_3) 以及半徑 r，就是說，这里所說的算术平均值是四个变量 (x_1, x_2, x_3, r) 的函数。我們可以把这个算术平均值写成两种形式：

$$v(x_1, x_2, x_3, r) = \\ = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \omega(x_1+\alpha_1 r;\ x_2+\alpha_2 r;\ x_3+\alpha_3 r)\, d_1\sigma \tag{68}$$

或

$$v(x_1, x_2, x_3, r) = \frac{1}{4\pi r^2}\iint_{C_r} \omega(x_1+\alpha_1 r;\ x_2+\alpha_2 r;\ x_3+\alpha_3 r)\, d_r\sigma。$$

我們証明，对于任何的选擇的函数 ω，函数 v 总滿足一个相同的偏微分方程，它就是：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \Delta v + \frac{2}{r} v_r = 0, \tag{69}$$

其中
$$\Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2}。$$

在公式(68)中沿單位球面求的积分可以在积分号下对 x_i 求导数。如此，我們就有：

$$\Delta v=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Delta\omega(x_i+\alpha_i r)d_1\sigma,$$

而且
$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\alpha_k d_1\sigma。$$

后一个积分可以变换为沿球面 $C_r(x_1, x_2, x_3)$ 的积分：

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{C_r}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\alpha_k d_r\sigma,$$

应用奥斯特洛格拉得斯基公式，就得到：

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{1}{4\pi r^2}\iiint\limits_{D_r}\Delta\omega dv, \tag{70}$$

其中 D_r 是以 (x_1, x_2, x_3) 为心 r 为半徑的球体，最后这个表达式是 r 的两个函数的乘积：一个是有理函数 $\frac{1}{4\pi r^2}$；一个是积分。沿球体 D_r 的三重积分对 r 的导数等于同样的被积函数沿这个球的球面 C_r 的积分。为要驗証这个事实，例如，只須通过球面坐标来表达沿 D_r 的积分。如此，再对 r 求一次导数，就得到：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}=-\frac{1}{2\pi r^3}\iiint\limits_{D_r}\Delta\omega dv+\frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{C_r}\Delta\omega d_r\sigma。$$

把所有上面講的关于导数的表达式代入到方程(69)中，就直接驗明 v 确实满足这个方程。若 $r\to 0$，則由公式(68)直接推出，$v(x_1, x_2, x_3)$ 趋向 $\omega(x_1, x_2, x_3)$，并且由(70)推出，$\frac{\partial v}{\partial r}$ 趋向零，因为依照中值定理公式(70)中的三重积分与 r^3 同級，而分母中只有 r^2。于是我們引出下面这个定理：

定理　对于任何的选定的函数 ω，假設它有直到二阶的連續导数，則由等式(68)所确定的函数 v 满足方程(69)以及初始条件：

$$v\bigg|_{r=0}=\omega(x_1, x_2, x_3);\quad \frac{\partial v}{\partial r}\bigg|_{r=0}=0。\tag{71}$$

利用这个定理，我們来証明，函数

$$u(x_1, x_2, x_3, t)=tv(x_1, x_2, x_3, at)\tag{72}$$

滿足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)\tag{73}$$

以及初始条件

$$u\bigg|_{t=0}=0;\quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\omega(x_1, x_2, x_3)。\tag{74}$$

实际上，我們有

$$\frac{\partial u}{\partial t}=v(x_1, x_2, x_3, at)+at\,\frac{\partial v(x_1, x_2, x_3, at)}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=2a\,\frac{\partial v(x_1, x_2, x_3, at)}{\partial r}+a^2t\,\frac{\partial^2 v(x_1, x_2, x_3, at)}{\partial r^2},$$

$$\Delta u=t\Delta v(x_1, x_2, x_3, at),$$

其中，例如，$\frac{\partial v(x_1, x_2, x_3, at)}{\partial r}$ 是导数 $\frac{\partial v(x_1, x_2, x_3, r)}{\partial r}$ 当 $r=at$ 时的值。把上面的表达式代入到方程 (73) 中，当 $r=at$ 时我們就得到方程(69)，以上我們已經証明过，它是成立的。初始条件(74)可以由(71)直接得来。由于方程(73)是常系数綫性齐次方程，我們可以肯定，函数 $u_1=\frac{\partial u}{\partial t}$ 也滿足这个方程。現在我們来确定当 $t=0$ 时它的初始条件。注意初始条件 (74)，对于函数 $u_1=\frac{\partial u}{\partial t}$ 我們直接得到：

$$u_1\bigg|_{t=0}=\omega(x_1, x_2, x_3)。$$

根据(73)，对于导数 $\frac{\partial u_1}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 我們有：

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}\bigg|_{t=0}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)\bigg|_{t=0},$$

或由(74)中第一个初始条件对坐标求导数，由此我們得到

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0}=0。$$

如此，以上作出的波动方程(73)的滿足初始条件(74)的解对 t 的导数，也是同一个方程的解而滿足初始条件：

$$\left.u_1\right|_{t=0}=\omega(x_1, x_2, x_3);\quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0}=0。\qquad (74_1)$$

回到以前的坐标的記法，并且在第一个情形的初始条件(74)中取某一个函数 $\varphi_1(x, y, z)$ 作 $\omega(x, y, z)$，在第二个情形的初始条件 (74_1) 中取任何另一个函数 $\varphi(x, y, z)$ 作 $\omega(x, y, z)$，再把所作出的解相加，就有方程(67)的滿足下列初始条件的解：

$$\left.u\right|_{t=0}=\varphi(x, y, z);\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x, y, z)。\qquad (75)$$

为簡短起見，我們用 $T_r\{\omega(M)\}$ 来記函数 ω 沿以 $M(x, y, z)$ 为心 r 为半徑的球面的算术平均值，依照以上所述，我們可以把所講的方程(67)的滿足初始条件(75)的解写成下面的形状：

$$u(M, t)=tT_{at}\{\varphi_1(M)\}+\frac{\partial}{\partial t}[tT_{at}\{\varphi(M)\}]。\qquad (76)$$

这个公式通常叫做卜阿桑公式。显然，它可以写成下面的形状：

$$u(x, y, z, t)=\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi_1(\alpha, \beta, \gamma)d_1\sigma+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi(\alpha, \beta, \gamma)d_1\sigma\right],\qquad (76_1)$$

其中 $d_1\sigma=\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ 而 (α, β, γ) 是上述球面的变点的坐标：

$$\alpha=x+at\sin\theta\cos\varphi,\ \beta=y+at\sin\theta\sin\varphi,\ \gamma=z+at\cos\theta。\qquad (77)$$

以上的理由說明，由公式(76)所确定的函数 u 实际上滿足方程(67)以及条件(75)，只要 $\varphi_1(x, y, z)$ 有直到二阶的連續导数而 $\varphi(x, y, z)$ 有直到三阶的連續导数。后者是由于在公式(76)的第

二項中出現有对 t 的导数。

不过，如果 $\varphi(x, y, z)$ 和 $\varphi_1(x, y, z)$ 具有較坏的可微性，例如，在問題中是集中的初始扰动，于是这时自然会認为公式 (76_1) 仍給出問題的解，只是在这个情形不是古典解，而是广义解(参看第四卷)。

在以后我們会知道，所提出的問題只有一个解。

設初始扰动集中在某一个以曲面 (σ) 为界的有界容积 (v) 上，就是說，在 (v) 之外 $\varphi(N)$ 与 $\varphi_1(N)$ 等于零，設点 M 出現在 (v) 之外。当 $t<\frac{d}{a}$ 时，其中 d 是由 M 到 (σ) 的最短距离，球面 (S_{at}) 就出現在 (v) 之外，上述的两个函数在 (S_{at}) 上就都等于零，于是公式 (76) 給出 $u(M, t)=0$，就是說在点 M 是靜止的。在时刻 $t=\frac{d}{a}$ 曲面 (S_{at}) 切于 (σ)，于是波的前陣面进到 M。最后，当 $t>\frac{D}{a}$ 时，其中 D 是由 M 到曲面 (σ) 上的点的最大距离，球面 (S_{at}) 就又出現在 (v) 之外 [整个容积 (v) 在 (S_{at}) 的内部]，于是公式 (76) 又給出 $u(M, t)=0$。时刻 $t=\frac{D}{a}$ 对应于波的后陣面通过点 M，此后在这点 $u(M, t)$ 就等于零，而不像对于弦的情形(就是平面波的情形)一样等于常数。在給定的时刻 t 波的前陣面代表这样的曲面，它把还沒有开始振动的点与已經振动的点分开。由以上推出，这个曲面的所有的点到 (σ) 具有等于 at 的最短距离。不难証明，这个曲面就是球心在曲面 (σ) 上半徑为 at 的球面族的包絡。我們知道，常数 a 是波陣面的傳播速度。

172. 柱面波 在空間定好直角坐标軸，設函数 $\varphi(x, y, z)$ 与 $\varphi_1(x, y, z)$ 只依賴于 x 与 y，就是說，在任何的平行于 OZ 軸的直綫上它們保持常数值。这时如果平行于 OZ 軸移动点 M，則显然公式 (76_1) 的右边不改变它的值，就是說，函数 $u(x, y, z, t)$ 也不依

賴于 z，于是公式 (76_1) 給出方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{78}$$

具有初始条件

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x,\ y);\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x,\ y) \tag{79}$$

时的解。我們可以專門停留在平面 XY 上来考虑这个解。为此，我們需要把公式 (76_1) 中沿着球面取的积分变换为沿平面 XY 上一个圓的积分。在平面 XY 上取点 $M(x,\ y)$。由公式 (77) 所确定的以 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ 为坐标的点，当 $z=0$ 时是以 $M(x,\ y,\ 0)$ 为心 at 为半徑的球面 (S_{at}) 上的变点。这个球面的面积單元是 $dS_{at}=$ $=a^2t^2d_1\sigma$。这球面出現在平面 XY 之上及其下的两部分在平面 XY 上的投影是以 M 为心 at 为半徑的圓 (C_{at})。投影的面积單元 dC_{at} 由下面这公式連系于球面的面积單元 dS_{at}[**62**]：

$$dS_{at}=\frac{dC_{at}}{\cos(n,\ Z)},$$

其中 n 是 (S_{at}) 的法綫方向，就是这个球的半徑与 OZ 軸作成銳角的方向。設 N 是球面上的变点，N_1 是它在平面 XY 上的投影，則由初等几何学中的理由，显然

$$\cos(n,\ Z)=\frac{\overline{NN_1}}{\overline{MN}}=\frac{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}}{at},$$

其中 $(\alpha,\ \beta)$ 是圓 (C_{at}) 的变点的坐标。把这个代入到公式 (76_1) 的第一个积分中，注意圓 (C_{at}) 可以看作是由球面 (S_{at}) 的上部得来的，也可以看作是由它的下部得来的，我們就得到公式 (76_1) 中第一个积分的如下的变换：

$$\frac{t}{4\pi}\iint\varphi_1(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\,d_1\sigma=\frac{1}{4\pi a^2t}\iint\limits_{(S_{at})}\varphi_1(\alpha,\ \beta)\,dS_{at}=$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{(C_{at})}\frac{\varphi_1(\alpha,\ \beta)}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}}\,dC_{at}。$$

应用同样的变换于第二个积分，并把平面 XY 的面积單元 dC_{at} 記成 $d\alpha d\beta$ 的形状，結果我們得到下面这个关于所要求的滿足方程(78)以及条件(79)的函数的公式：

$$u(x,\ y,\ t)=\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{(C_{at})}\frac{\varphi_1(\alpha,\ \beta)d\alpha d\beta}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{(C_{at})}\frac{\varphi(\alpha,\ \beta)d\alpha d\beta}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}}\right]。\qquad(80)$$

設初始扰动局限于平面 XY 上以 (l) 为界綫的某一个有限区域 (B) 中，就是說，在 (B) 之外 $\varphi(x,\ y)$ 与 $\varphi_1(x,\ y)$ 等于零。設点 M 位于 B 之外。当时刻 $t<\frac{d}{a}$ 时，其中 d 是由 M 到界綫 (l) 的最短距离，圓 (C_{at}) 与 (B) 沒有公共点，在整个圓 (C_{at}) 上函数 $\varphi(x,\ y)$ 与 $\varphi_1(x,\ y)$ 等于零，于是公式(80)給出 $u(x,\ y,\ t)=0$。在时刻 $t=\frac{d}{a}$，波的前陣面进到点 M。对于 $t>\frac{D}{a}$ 的值，其中 D 是由 M 到 (l) 上的点的最大距离，这时区域 (B) 整个包含在圓 (C_{at}) 之內，于是在公式(80)中所要求的积分需要單純的沿区域 (B) 来作，因为在 (B) 之外 $\varphi(x,\ y)$ 与 $\varphi_1(x,\ y)$ 等于零；就是說

$$u(x,\ y,\ t)=\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{(B)}\frac{\varphi_1(\alpha,\ \beta)d\alpha d\beta}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{(B)}\frac{\varphi(\alpha,\ \beta)d\alpha d\beta}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}}\right]。$$

在这情形下，波的后陣面在时刻 $t=\frac{D}{a}$ 通过点 M 之后，函数 $u(x,\ y,\ t)$ 不是像在三維空間的情形等于零，也不像在弦的情形等于常数。不过由于在分母中有 a^2t^2 出現，我們終归可以肯定，当 t 无限增加时 $u(x,\ y,\ t)$ 趋向零。

我們說，在所考虑的情形下波的后陣面通过之后有波的瀰漫現象發生。我們保留在平面 XY 上导出了全部的理由。在三維

空間中方程(78)对应于所謂的柱面波。

173. n 維空間的情形　在[171]中所得到的結果可以直接推广到任何多維的情形。我們来考慮以 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为坐标的 n 維空間。在这样的空間中半徑为 r 的球的容积由下式确定[99]:

$$v_n(r)=\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{2\cdot4\cdot6\cdots(n-2)\cdot n}\,r^n\quad (n\text{ 是偶数}),$$

$$v_n(r)=\frac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{1\cdot3\cdot5\cdots(n-2)\cdot n}\,r^n\quad (n\text{ 是奇数})。$$

由这两个表达式对 r 求导数,就得到球面面积的大小

$$\sigma_n(r)=\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{2\cdot4\cdot6\cdots(n-2)}\,r^{n-1}\quad (n\text{ 是偶数}),$$

$$\sigma_n(r)=\frac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{1\cdot3\cdot5\cdots(n-2)}\,r^{n-1}\quad (n\text{ 是奇数})。$$

通过 $(n-1)$ 个角来表达球半徑的方向余弦 α_k 的公式如下:

$$\alpha_1=\cos\theta_1$$

$$\alpha_2=\sin\theta_1\cos\theta_2$$

$$\alpha_3=\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{n-2}=\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2}$$

$$\alpha_{n-1}=\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\varphi$$

$$\alpha_n=\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\varphi,$$

其中　$0\leqslant\theta_k\leqslant\pi;\quad 0\leqslant\varphi<2\pi$。

單位球面的面积單元是:

$$d_1\sigma=\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}d\theta_1 d\theta_2\cdots d\theta_{n-2}d\varphi,$$

对于半徑为 r 的球:

$$d_r\sigma=r^{n-1}d_1\sigma。$$

設在空間 R_n 中給定一个具有直到二阶連續导数的函数 ω。它的沿着以 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为心 r 为半徑的球面的算术平均値由下式确定:

$$v(x_1, x_2, \cdots, x_n, r)=\frac{1}{\sigma_n(1)}\int\cdots\int\omega(x_1+\alpha_1 r, x_2+\alpha_2 r, \cdots, x_n+\alpha_n r)\,d_1\sigma$$

或　$$v(x_1, x_2, \cdots, x_n, r)=\frac{1}{\sigma_n(r)}\int\cdots\int\omega(x_1+\alpha_1 r, x_2+\alpha_2 r, \cdots, x_n+\alpha_n r)\,d_r\sigma。$$

与以前一样,我們可以証明,函数 v 滿足微分方程:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}-\Delta v+\frac{n-1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}=0$$

以及初始条件:

$$v\Big|_{r=0}=\omega(x_1,\cdots,x_n);\quad \frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=0}=0。$$

利用上述結果，可以得到关于具有任何多个自变量的波动方程的最終的公式。对于一般情形我們只講最終結果。波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) \tag{81}$$

的滿足初始条件：

$$u\Big|_{t=0}=0;\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\omega(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

的解，当 n 是奇数时有下面的形状：

$$u(x_1,\cdots,x_n,t)=\frac{2^{\frac{n-3}{2}}}{1\cdot3\cdots(n-2)}\frac{\partial^{\frac{n-3}{2}}}{\partial(t^2)^{\frac{n-3}{2}}}[t^{n-2}T_{at}\{\omega(x_i)\}], \tag{82$_1$}$$

当 n 是偶数时

$$u(x_1,\cdots,x_n,t)=$$

$$=\frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{2\cdot4\cdots(n-2)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}\frac{\partial^{\frac{n-2}{2}}}{\partial(r^2)^{\frac{n-2}{2}}}[r^{n-2}T_r\{\omega(x_i)\}]dr, \tag{82$_2$}$$

其中 $T\rho\{\omega(x_i)\}$ 是函数 $\omega(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 沿以 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为心 ρ 为半徑的球面的算术平均值。为要驗証公式 (82_1) 与 (82_2)，当 n 是奇数时，只須函数 $\omega(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 有直到 $\frac{n+1}{2}$ 阶的連續导数；当 n 是偶数时，只須有直到 $\frac{n+2}{2}$ 阶的連續导数。

174. 非齐次波动方程 我們現在在无界空間中考虑非齐次波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t), \tag{83}$$

求它的滿足零初始条件：

$$u\Big|_{t=0}=0;\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 \tag{84}$$

的解。由这个解加上齐次方程的滿足初始条件(75)的解，就得到方程(83)的滿足条件(75)的解。

为要求上面所給的問題的解，我們考虑齐次方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{85}$$

的滿足初始条件

$$w\Big|_{t=\tau}=0;\quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=\tau}=f(x, y, z, \tau) \tag{86}$$

的解，这里不取 $t=0$ 作为初始时刻，而取 $t=\tau$，其中 τ 是某一个参变量。函数 w 将由卜阿桑公式来表达，只是这个公式中我們应当用 $(t-\tau)$ 来替换 t，因为初始时刻不是 $t=0$，而是 $t=\tau$。如此，我們就有：

$$w(x, y, z, t;\ \tau)=\frac{t-\tau}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f[x+\alpha_1 a(t-\tau), \\ y+\alpha_2 a(t-\tau), z+\alpha_3 a(t-\tau), \tau]d_1\sigma, \tag{87}$$

其中

$$\alpha_1=\sin\theta\cos\varphi;\quad \alpha_2=\sin\theta\sin\varphi;\quad \alpha_3=\cos\theta。 \tag{88}$$

注意，函数 w 除去通常的自变量 (x, y, z, t) 外，还依赖于参变量 τ。現在我們由下面这公式作出一个函数 $u(x, y, z, t)$：

$$u(x, y, z, t)=\int_0^t w(x, y, z, t;\ \tau)d\tau, \tag{89}$$

并且証明它满足非齐次方程(83)以及零初始条件(84)。我們有：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\int_0^t \frac{\partial w(x, y, z, t;\ \tau)}{\partial t}d\tau+w(x, y, z, t;\ \tau)\Big|_{\tau=t}。 \tag{90}$$

根据(86)中第一个条件，积分以外的一項等于零。再对 t 求一次导数，就得到：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\int_0^t \frac{\partial^2 w(x, y, z, t;\ \tau)}{\partial t^2}d\tau+\frac{\partial w(x, y, z, t;\ \tau)}{\partial t}\Big|_{\tau=t},$$

并且根据(86)中第二个条件，所得到的积分以外的一項等于 $f(x, y, z, t)$，就是說，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\int_0^t \frac{\partial^2 w(x, y, z, t;\ \tau)}{\partial t^2}d\tau+f(x, y, z, t)。$$

求表达式(89)对坐标的导数时，只須求被积函数的导数：

$$\Delta u=\int_0^t \Delta w(x, y, z, t;\ \tau)d\tau。$$

由后两个公式以及方程(85)直接推出，u 满足方程(83)。由

公式(89)与(90)直接推出初始条件(84)，只要注意，如以上所述，在公式 (90) 中积分以外的項等于零。如此，公式 (89) 給出方程(83)的具有初始条件(84)的解。在(89)中用函数 $w(x, y, z, t; \tau)$ 的表达式(87)来替代这个函数，就得到：

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi}\int_0^t (t-\tau)\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f[x+\alpha_1 a(t-\tau),\right.$$

$$\left. y+\alpha_2 a(t-\tau), z+\alpha_3 a(t-\tau), \tau] d_1\sigma\right] d\tau。$$

我們把这个关于 u 的表达式变换为另一个形状。引用新的积分变量 $r=a(t-\tau)$ 来替代 τ。完成换元工作，就得到：

$$u(x, y, z, t)=$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left(x+\alpha_1 r, y+\alpha_2 r, z+\alpha_3 r, t-\frac{r}{a}\right) r\sin\theta dr\, d\theta\, d\varphi$$

或者，用 r 乘再除以 r：

$$u(x, y, z, t)=$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{f\left(x+\alpha_1 r, y+\alpha_2 r, z+\alpha_3 r, t-\frac{r}{a}\right)}{r} r^2\sin\theta dr\, d\theta\, d\varphi。$$

注意关于 α_k 的公式 (88) 并回忆在球坐标系中关于容积單元的表达式，我們就看出，在最后的公式中出現的三次积分相当于沿以 (x, y, z) 为心 at 为半徑的球的三重积分。引用变点

$$\xi=x+\alpha_1 r;\quad \eta=y+\alpha_2 r;\quad \zeta=z+\alpha_3 r,$$

并注意 $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1$，就得到

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2},$$

关于 u 的表达式最后可以写成下面的形状：

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{r\leqslant at}\frac{f\left(\xi, \eta, \zeta, t-\frac{r}{a}\right)}{r} dv, \tag{91}$$

其中不等式 $r\leqslant at$ 表現的是上述的球 D_{at}。最后这表达式中的被

积函数的特征是下述事实：函数 f 要取在时刻 $t-\frac{r}{a}$，这个时刻在計算 u 的时刻 t 之前。时刻之差 $\frac{r}{a}$ 給出以速度 a 由点 (ξ,η,ζ) 行駛到点 (x,y,z) 所需要的时間。表达式(91)通常叫做推后势。我們还要提出，基本公式(89)具有簡單的物理意义，就是它表明非齐次方程(83)的滿足初始条件(84)的解是冲量 $w(x,y,z,t;\tau)d\tau$ 的和，冲量 $w(x,y,z,t;\tau)$ 是由自由項的存在而产生的，并且是由方程(85)与(86)所确定的。

現在我們考虑具有零初始条件时关于柱面波的非齐次波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t)。\tag{92}$$

像以上完全一样，我們可以得到这个問題的下面形狀的解：

$$u(x,y,t)=\int_0^t w(x,y,t;\tau)d\tau,$$

其中 $w(x,y,t;\tau)$ 滿足齐次方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

以及初始条件

$$w\Big|_{t=\tau}=0;\quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=\tau}=f(x,y,\tau)。$$

注意公式(80)，最后得到

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\Big[\iint\limits_{\rho\le a(t-\tau)}\frac{f(\xi,\eta,\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}}d\xi d\eta\Big]d\tau\tag{93}$$

$$[\rho^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]。$$

注意，在最后这个公式中我們要依时間求积分，而在公式(91)中就沒有，那里，对时間的依賴性归結于进行求积分时所沿的球的半徑对时間的依賴性以及函数 $f(x,y,z,t)$ 对时間的依賴性。在綫性的情形

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x, t) \tag{94}$$

解显然是：

$$u(x, t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)d\xi\right]d\tau。 \tag{95}$$

175. 点源 如果我們設方程(83)中的自由項只是在以坐标原点为心的不大的球上不等于零，則当这个球的半徑趋向零且当外力的强度无限增加时，取極限就可以得到存在有点源时波动方程的解，这个点源从时刻 $t=0$ 起开始作用，而它的依賴于时間的作用規律可以是任何的規律。設

$$当\sqrt{x^2+y^2+z^2}\geqslant\varepsilon 时，\quad f(x, y, z, t)=0, \tag{96}$$

而且

$$\iiint\limits_{C_\varepsilon} f(x, y, z, t)dx\,dy\,dz=4\pi\omega(t), \tag{97}$$

其中 C_ε 是以原点为心 ε 为半徑的球。回到公式(91)，我們算作 $at>\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。根据(96)，只須沿球 C_ε 进行求积分。当 $\varepsilon\to 0$ 时取極限，r 的大小就等于由点 (x, y, z) 到原点的距离，就是說 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，注意(97)，我們就得到：

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{r}\omega\left(t-\frac{r}{a}\right) \tag{98}$$

$$(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})。$$

此外，需要算作当 $r>at$ 时 $u(x, y, z, t)=0$，因为 $r>at$ 时，对于足够小的 ε 来講，积分(91)的积分区域不包含球 C_ε 在内。注意，当任意选定两次可微函数 $\omega(t)$ 时，函数(98)满足齐次波动方程，而在坐标原点有奇异点。

在方程(92)的情形，像以上完全一样，我們应当算作：

$$当\sqrt{x^2+y^2}>\varepsilon 时\ f(x, y, t)=0,$$

而且 $$\iint_{\gamma_\varepsilon} f(x, y, t)\,dx\,dy = 2\pi\omega(t),$$

其中 γ_ε 是以原点为心 ε 为半徑的圓。回到公式 (93)，取極限，就得到在柱面波的情形下关于点源的解：

$$u(x, y, t) = \frac{1}{a}\int_0^{t-\frac{\rho}{a}} \frac{\omega(\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}}\,d\tau \quad (at>\rho), \tag{99}$$
$$u(x, y, t)=0 \quad (at<\rho)$$
$$(\rho=\sqrt{x^2+y^2})。$$

公式(98)与(99)的不同与我們在前一段中所講的类似。依照公式(98)，在时刻 t 点源在点 (x, y, z) 的作用只依賴于这点源在时刻 $t-\frac{r}{a}$ 的强度。在公式(99)的情形，这个作用要由点源在从 $t=0$ 到 $t-\frac{\rho}{a}$ 的时間区間中的作用来确定。

在綫性的情形(94)，像上面一样，讓

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x, t)\,dx = \omega(t) \text{ 而且，当 } |x|>\varepsilon \text{ 时 } f(x, t)=0,$$

由公式(95)取極限，就得到：

$$\text{当 } |x|<at \text{ 时 } u(x, t)=\int_0^{t-\frac{|x|}{a}} \omega(\tau)\,d\tau,$$
$$\text{当 } |x|>at \text{ 时 } u(x, t)=0。 \tag{100}$$

176. 膜的横振动 到現在为止，我們曾就平面与空間的无界情形考虑了波动方程，那时，除微分方程之外，只有初始条件。关于波动方程在平面上以及空間中的边值問題比在直綫的情形复杂得多。我們就两种特殊情形来考虑平面上的边值問題——当解决問題所在的区域是矩形或圓时。現在我們从物理上来解釋平面上的波动方程，把它看作是关于膜的横振动的方程。

所謂膜我們了解作極薄的薄片，像弦那样，只受有張力的作用，而不弯曲。設膜受有均匀的張力 T_0 的作用，在平衡状态时位于平面 (xy) 上，我們只限于考虑运动平行于 Oz 軸的情形，这时，膜上的点 (x, y) 的位移 u 是 x, y 与 t 的函数，它滿足下面这个与弦的方程类似的微分方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x, y, t), \tag{101}$$

其中
$$a=\sqrt{\frac{T_0}{\rho}},$$
ρ 是膜的面密度，ρf 是外力或負載。我們这里不講方程(101)是怎样得出来的。

除微分方程(101)外，应当注意到边值条件，就是在界綫 (C)（膜的边界）上函数 u 应当満足的条件，我們只講膜被釘住在界綫(C)上的情形，就是說

$$\text{在}(C)\text{上}\quad u=0。\tag{102}$$

此外，应当給出初始条件，就是在初始时刻膜的所有的点的位移与速度：

$$u\Big|_{t=0}=\varphi_1(x,\ y);\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_2(x,\ y)。\tag{103}$$

177. 矩形膜 现在我們考慮矩形膜的自由振动，它的界綫是在平面$(x,\ y)$上的矩形，边为

$$x=0,\ x=l,\ y=0,\ y=m。\tag{104}$$

我們算作沒有外力，就是 $f=0$。

于是，我們需要求方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\tag{105}$$

的満足条件(102)与(103)的解。

我們仍然用駐波的方法（富里埃法）来求方程(105)的形状为：

$$(\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t)U(x,\ y)\tag{106}$$

的特解，这就給出

$$-\omega^2(\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t)U(x,\ y)=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)(\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t),$$

由此，讓

$$\frac{\omega^2}{a^2}=k^2,\tag{107}$$

就求得关于 U 的方程：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+k^2U=0。$$

下一步，我們由下面的形状来求这个方程的特解：

$$U(x,\ y)=X(x)Y(y),\tag{108}$$

这就給出
$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)+k^2X(x)Y(y)=0,$$

或
$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)+k^2Y(y)}{Y(y)}=-\lambda^2,$$

其中 λ^2 在这里是未定的常数。

于是，我們有两个方程：

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0;\quad Y''(y)+\mu^2Y(y)=0,\tag{109}$$

其中 $$\mu^2=k^2-\lambda^2,\quad \mu^2+\lambda^2=k^2.$$

方程(109)給出函数 $X(x)$ 与 $Y(y)$ 的一般形状:

$$X(x)=C_1\sin\lambda x+C_2\cos\lambda x;\quad Y(y)=C_3\sin\mu y+C_4\cos\mu y.$$

由条件 在(C)上 $u=0$

得到 在(C)上 $U(x, y)=0$,

而最后这个条件可以分解为下列的条件:

$$X(0)=0;\ X(l)=0;\ Y(0)=0;\ Y(m)=0,$$

由此显然 $C_2=C_4=0$, 于是如果我們弃去不等于零的常数因子 C_1 与 C_3, 則成为:

$$X(x)=\sin\lambda x,\quad Y(y)=\sin\mu y, \tag{110}$$

可是

$$\sin\lambda l=0,\quad \sin\mu m=0。 \tag{111}$$

由方程(111)推知, λ 与 μ 有无穷多的值

$$\lambda=\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_\sigma,\ \cdots;\quad \mu=\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_\tau,\ \cdots;$$
$$\lambda_\sigma=\frac{\sigma\pi}{l},\quad \mu_\tau=\frac{\tau\pi}{m}。 \tag{112}$$

由数串(112)中任意各取 λ 与 μ 的一个值,就得到对应的常数 k^2 的下面的值:

$$k^2_{\sigma,\tau}=\lambda^2_\sigma+\mu^2_\tau=\pi^2\left(\frac{\sigma^2}{l^2}+\frac{\tau^2}{m^2}\right),$$

由 k^2 的这个值根据(107)我們又求出频率 ω 的下面的值:

$$\omega^2_{\sigma,\tau}=a^2k^2_{\sigma,\tau}=a^2\pi^2\left(\frac{\sigma^2}{l^2}+\frac{\tau^2}{m^2}\right)。 \tag{113}$$

在表达式(106)中用 λ_σ 代入作 λ, 用 μ_τ 代入作 μ, 并用 $\alpha_{\sigma,\tau}$ 与 $\beta_{\sigma,\tau}$ 各記 α 与 β 的值,我們就得到方程(105)的滿足边值条件(102)的无穷多个解,形状如下:

$$(\alpha_{\sigma,\tau}\cos\omega_{\sigma,\tau}t+\beta_{\sigma,\tau}\sin\omega_{\sigma,\tau}t)\sin\frac{\sigma\pi x}{l}\sin\frac{\tau\pi y}{m},$$

就是說,与弦的自有調和振动相对应的,膜的无穷多的自有(自由)調和振动。

常数 α 与 β 要由初始条件来确定。在公式

$$u=\sum_{\sigma,\tau=1}^{\infty}(\alpha_{\sigma,\tau}\cos\omega_{\sigma,\tau}t+\beta_{\sigma,\tau}\sin\omega_{\sigma,\tau}t)\sin\frac{\sigma\pi x}{l}\sin\frac{\tau\pi y}{m},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{\sigma,\tau=1}^{\infty}\omega_{\sigma,\tau}(\beta_{\sigma,\tau}\cos\omega_{\sigma,\tau}t-\alpha_{\sigma,\tau}\sin\omega_{\sigma,\tau}t)\sin\frac{\sigma\pi x}{l}\sin\frac{\tau\pi y}{m}$$

中,讓 $t=0$, 根据(103)就得到:

$$u\Big|_{t=0}=\varphi_1(x, y)=\sum_{\sigma,\tau=1}^{\infty}\alpha_{\sigma,\tau}\sin\frac{\sigma\pi x}{l}\sin\frac{\tau\pi y}{m},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_2(x, y)=\sum_{\sigma,\tau=1}^{\infty}\beta_{\sigma,\tau}\omega_{\sigma,\tau}\sin\frac{\sigma\pi x}{l}\sin\frac{\tau\pi y}{m}。$$

这两个公式恰好是函数 φ_1 与 φ_2 的二重富里埃級数展开式。不难看出系数 α 与 β

应由下列公式确定：

$$\left.\begin{aligned} a_{\sigma,\tau}&=\frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m \varphi_1(\xi,\eta)\sin\frac{\sigma\pi\xi}{l}\sin\frac{\tau\pi\eta}{m}d\xi d\eta,\\ \omega_{\sigma,\tau}\beta_{\sigma,\tau}&=\frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m \varphi_2(\xi,\eta)\sin\frac{\sigma\pi\xi}{l}\sin\frac{\tau\pi\eta}{m}d\xi d\eta,\end{aligned}\right\} \tag{114}$$

这就得出了所給的問題的解。

膜的情形与弦的情形所不同的是，对于弦來講，自有振动的每一个頻率对应于弦的一种形式，它簡單地被节点分为某些相等的段；而对于膜来講，同样的頻率因节綫（即这样的綫，在它上面振动的振幅成为零）的位置不同可以对应于膜的几种形式。以正方形膜

$$l=m=r$$

为例來考察这个事实最簡單。

在这情形下頻率 $\omega_{\sigma,\tau}$ 由公式

$$\omega_{\sigma,\tau}=\frac{a\pi}{r}\sqrt{\sigma^2+\tau^2}=\alpha\sqrt{\sigma^2+\tau^2} \tag{115}$$

来确定，其中 $\alpha=\frac{a\pi}{r}$ 是不依賴于 σ 与 τ 的因子。

讓 $\sigma=\tau=1$，就得到膜的基本音 u_{11}，頻率 $\omega_{11}=\alpha\sqrt{2}$：

$$u_{11}=N_{11}\sin(\omega_{11}t+\varphi_{11})\sin\frac{\pi x}{r}\sin\frac{\pi y}{r}.$$

这时膜内根本沒有节綫。

然后讓　　　　$\sigma=1,\ \tau=2$ 或 $\sigma=2,\ \tau=1$，

就有两个不同的音，而有相同的頻率

$$\omega_{12}=\omega_{21}=\alpha\sqrt{5},$$

就是

$$u_{12}=N_{12}\sin(\omega_{12}t+\varphi_{12})\sin\frac{\pi x}{r}\sin\frac{2\pi y}{r},$$

$$u_{21}=N_{21}\sin(\omega_{21}t+\varphi_{21})\sin\frac{2\pi x}{r}\sin\frac{\pi y}{r}.$$

这两个簡單振动的节綫各是

$$y=\frac{r}{2}\ \text{或}\ x=\frac{r}{2}.$$

但是除振动 u_{12} 与 u_{21} 之外，还有无穷多的振动具有相同的頻率 ω_{12}，它們是由 u_{12} 与 u_{21} 的綫性結合得来的。为簡單起見，設 $\varphi_{12}=\varphi_{21}=0$，我們就得到下面形状的振动：

$$\sin\omega t\left[N_1\sin\frac{\pi x}{r}\sin\frac{2\pi y}{r}+N_2\sin\frac{2\pi x}{r}\sin\frac{\pi y}{r}\right],$$

其中 $\omega=\omega_{12}=\omega_{21}$，$N_1=N_{12}$，$N_2=N_{21}$。

当 $N_1=N_2$ 时，节綫由下面这方程确定

$$0=\sin\frac{\pi x}{r}\sin\frac{2\pi y}{r}+\sin\frac{2\pi x}{r}\sin\frac{\pi y}{r}=2\sin\frac{\pi x}{r}\sin\frac{\pi y}{r}\left(\cos\frac{\pi x}{r}+\cos\frac{\pi y}{r}\right),$$

它給出节綫 $x+y=r$。

当 $N_2=-N_1$ 时，用同样的方法可以求得节綫 $x-y=0$。

圖 134 上表示出这些簡單的情形。当 $N_2\neq\pm N_1$ 而且 $N_1, N_2\neq 0$，我們对于同一的頻率得到較复杂的节綫。

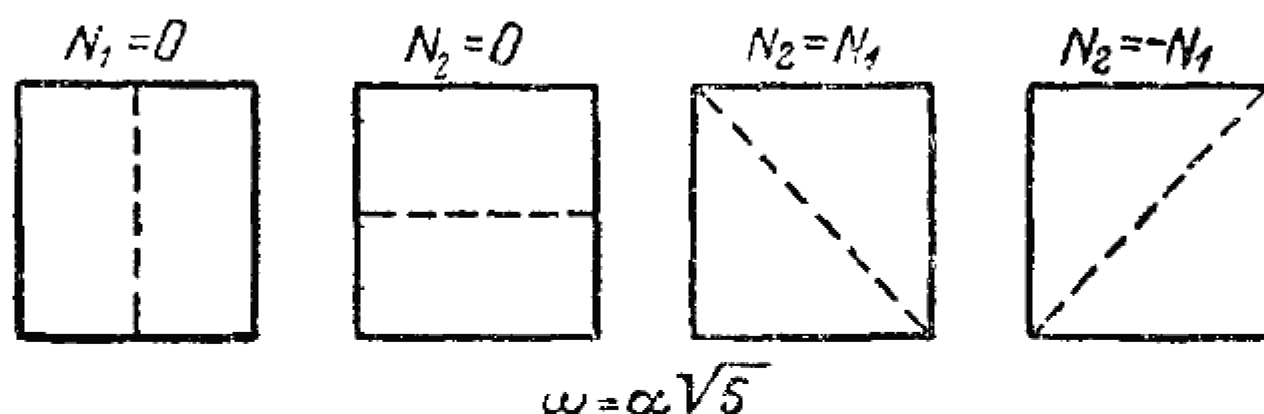


圖 134.

它們都有下面形状的方程：

$$N_2\cos\frac{\pi x}{r}+N_1\cos\frac{\pi y}{r}=0。$$

現在讓 $\sigma=2,\quad \tau=2,$

就得到頻率为 $\omega_{22}=\alpha\sqrt{8}$

的唯一的音，它的节綫是（圖 135）

$$x=\frac{r}{2}\text{ 与 } y=\frac{r}{2}。$$



圖 135.

下面的情形：　$\sigma=1, \tau=3;\quad \sigma=3, \tau=1,$

又出現有无穷多的具有同一頻率 $\omega_{13}=\omega_{31}=\alpha\sqrt{10}$ 的振动。在类似于具有頻率 $\omega_{12}==\omega_{21}=\alpha\sqrt{5}$ 的几种簡單情形下，它的节綫如圖 136 所示。所有这些圖形所表示的恰好是声学中已知的克拉徳泥圖形。

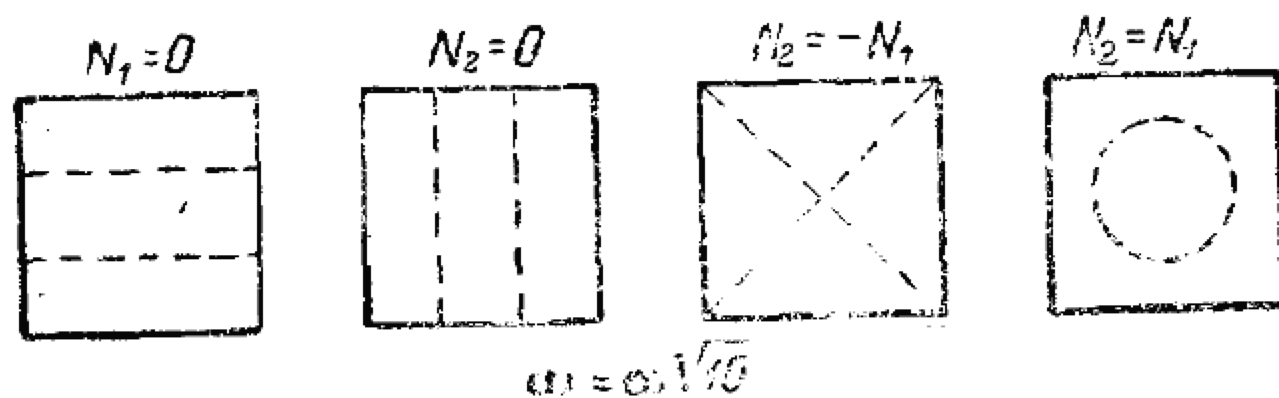


圖 136.

膜的强迫振动的討論像弦的强迫振动的討論完全一样。所不同的只是要把外力 $f(x, y, t)$ 展开为二重富里埃級数,而不是簡單的富里埃級数。

178. 圓形膜 圓形膜的情形給出把已知函数依貝塞尔函数展开的例,——这个例的重要不仅在于作为对于膜的振动理論的叙述,并且因为在其他的很重要的数学物理問題中会遇到这样的展开式。

因此,我們来討論圓形膜的自有(自由)振动,它的界綫是以坐标原点为心、l 为半徑的圓周。我們依然算作在膜的界綫上沒有位移。引用極坐标 (r, θ) 来替代直角坐标 (x, y),于是我們有:

$$u\Big|_{r=l}=0。$$

像在矩形膜的情形一样,我們来求方程(105)的下面形状的特解:

$$(\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t)U,$$

并且我們算作函数 U 是通过 (r, θ) 来表达的,而不是通过 (x, y) 表达的。关于函数 U 我們得到同样的微分方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+k^2U=0, \tag{116}$$

不过只是应当把它变换到新的变量 (r, θ)。为此,只須在極坐标来表达拉普拉斯运算子

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}。\tag{117}$$

我們知道,三个变量的拉普拉斯运算子

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

在柱面坐标被表达成下面的形状[119]:

$$\Delta U=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}+\rho\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right]。$$

假設 U 不依賴于 z,就通过極坐标表达出 (117)。以下我們用 r 来記矢徑的長度以替代 ρ,用 θ 来記極角以替代 φ:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}。$$

把方程(116)改写成:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}+k^2U=0。$$

我們来求它的为乘积形状:

$$U(r,\theta)=T(\theta)\cdot R(r)$$

的特解,它給出:

$$T(\theta)\left[R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+k^2R(r)\right]+\frac{1}{r^2}T''(\theta)R(r)=0,$$

或
$$\frac{T''(\theta)}{T(\theta)}=-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)+k^2r^2R(r)}{R(r)}=-\lambda^2,$$

結果得到:

$$T''(\theta)+\lambda^2T(\theta)=0, \tag{118}$$

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(k^2-\frac{\lambda^2}{r^2}\right)R(r)=0。 \tag{119}$$

方程(118)具有下面形状的一般解:

$$T(\theta)=C\cos\lambda\theta+D\sin\lambda\theta,$$

因为依照这个問題的意义,函数 U 应当是 θ 的以 2π 为周期的單值周期函数,于是函数 $T(\theta)$ 应当具有同样的性質,所以除非 λ 是整数才可能。只限制 λ 取正值,我們应当算作 $\lambda=0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$ 我們把对应的关于函数 $T(\theta)$ 与 $R(r)$ 的表达式記作:

$T_0(\theta), T_1(\theta), T_2(\theta), \cdots, T_n(\theta), \cdots;\quad R_0(r), R_1(r), R_2(r), \cdots, R_n(r), \cdots$。

由这样的方法,我們得到方程(105)的下面形状的无穷多个解:

$$(\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t)(C\cos n\theta+D\sin n\theta)R_n(r)\quad(\omega=ak)。 \tag{120}$$

函数 $R_n(r)$ 滿足方程(119),只是要用 n 来替换 λ:

$$R_n''(r)+\frac{1}{r}R_n'(r)+\left(k^2-\frac{n^2}{r^2}\right)R_n(r)=0。 \tag{121}$$

在[49]中我們講过,这方程的一般积分是

$$R_n(r)=C_1J_n(kr)+C_2K_n(kr), \tag{122}$$

其中 $J_n(x)$ 是貝塞尔函数,$K_n(x)$ 是貝塞尔方程的第二解,当 $x=0$ 时它成为无穷大;因为依照这个問題的意义,要求的解在膜的所有的点(包括坐标原点 $r=0$ 在內)应当保持有界,于是上面的关于 $R_n(r)$ 的公式中应当沒有含 $K_n(kr)$ 的項,就是說,$C_2=0$。我們可以算作 $C_1=1$,就是說,設

$$R_n(r)=J_n(kr), \tag{123}$$

这并不失去普遍性,于是边值条件

$$u\Big|_{r=l}=0$$

給出

$$J_n(kl)=0。 \tag{124}$$

規定 $kl=\mu$,我們就得到用以确定 μ 的超越方程

$$J_n(\mu)=0, \tag{125}$$

在貝塞尔函数論中証明了它有无穷多的正根:

$$\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \mu_3^{(n)}, \cdots, \mu_m^{(n)}, \cdots, \tag{126}$$

它們对应于参变数 k 的値

$$k_1^{(n)},\ k_2^{(n)},\ k_3^{(n)},\ \cdots;\quad k_m^{(n)}=\frac{\mu_m^{(n)}}{l},\tag{127}$$

根据(107)，得到频率 ω 的值

$$\omega_{m,n}=ak_m^{(n)}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m=1,\ 2,\ \cdots)。\tag{128}$$

在下表中我們給出前六个貝塞尔函数的前九个根

1	2.404	3.832	5.135	6.379	7.586	8.780
2	5.520	7.016	8.417	9.760	11.064	12.339
3	8.654	10.173	11.620	13.017	14.373	15.700
4	11.792	13.323	14.796	16.224	17.616	18.982
5	14.931	16.470	17.960	19.410	20.827	22.220
6	18.076	19.616	21.117	22.583	24.018	25.431
7	21.212	22.760	24.270	25.749	27.200	28.628
8	24.353	25.903	27.421	28.909	30.371	31.813
9	27.494	29.047	30.571	32.050	33.512	34.983

以下的根可以由下面这近似公式計算：

$$k_m^{(n)}=\frac{1}{4}\pi(2n-1+4m)-\frac{4n^2-1}{\pi(2n-1+4m)},\tag{129}$$

m 愈大时对于給定的 n 这个公式愈准确。現在我們不能导出这个基本公式(129)。

由公式(120)推出，我們所得到的特解可以写成下面的形状：

$$\begin{aligned}&(\alpha_{m,n}^{(1)}\cos\omega_{m,n}t+\alpha_{m,n}^{(2)}\sin\omega_{m,n}t)\cos n\theta\cdot J_n(k_m^{(n)}r)+\\&+(\beta_{m,n}^{(1)}\cos\omega_{m,n}t+\beta_{m,n}^{(2)}\sin\omega_{m,n}t)\sin n\theta\cdot J_n(k_m^{(n)}r)\\&(m,\ n,\ =1,\ 2,\ \cdots)。\end{aligned}\tag{130}$$

还要提出，当 $\lambda=0$ 时方程(118)有解——常数以及 θ。第二个解不适用，因为它不是周期的。在第一种情形，公式(120)給出解：

$$(\alpha_{m,0}^{(1)}\cos\omega_{m,0}t+\alpha_{m,0}^{(2)}\sin\omega_{m,0}t)J_0(k_m^{(0)}r)。$$

这个解也具有(130)的形状(当 $n=0$ 时)，所不同的只是当 $n=0$ 时公式(130)中的第二項由于有因子 $\sin n\theta$ 而等于零。

現在只剩下要滿足初始条件：

$$u\Big|_{t=0}=\varphi_1(r,\ \theta);\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_2(r,\ \theta)。\tag{131}$$

为了这个目的，注意所得到的特解，我們可以由下面形状的二重級数来求 u

$$\begin{aligned}u(r,\ \theta,\ t)=&\sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}(\alpha_{m,n}^{(1)}\cos\omega_{m,n}t+\alpha_{m,n}^{(2)}\sin\omega_{m,n}t)\cos n\theta\cdot J_n(k_m^{(n)}r)+\\&+\sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}(\beta_{m,n}^{(1)}\cos\omega_{m,n}t+\beta_{m,n}^{(2)}\sin\omega_{m,n}t)\sin n\theta\cdot J_n(k_m^{(n)}r)。\end{aligned}$$

計算出：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}\omega_{m,n}(\alpha_{m,n}^{(2)}\cos\omega_{m,n}t-\alpha_{m,n}^{(1)}\sin\omega_{m,n}t)\cos n\theta\cdot J_n(k_m^{(n)}r)+$$

$$+\sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}\omega_{m,n}(\beta_{m,n}^{(2)}\cos\omega_{m,n}t-\beta_{m,n}^{(1)}\sin\omega_{m,n}t)\sin n\theta\cdot J_n(k_m^{(n)}r),$$

在这两个公式中設 $t=0$，根据 (131)，我們就有必要把已知函数 $\varphi_1(r, \theta)$ 与 $\varphi_2(r, \theta)$ 展开为下面形状的二重級数：

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(r,\theta)&=\sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}(\alpha_{m,n}^{(1)}\cos n\theta+\beta_{m,n}^{(1)}\sin n\theta)\cdot J_n(k_m^{(n)}r),\\ \varphi_2(r,\theta)&=\sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}\omega_{m,n}(\alpha_{m,n}^{(2)}\cos n\theta+\beta_{m,n}^{(2)}\sin n\theta)\cdot J_n(k_m^{(n)}r)。\end{aligned}\right\}\quad(132)$$

把 θ 的周期函数 $\varphi_1(r, \theta)$ 展开为富里埃級数，我們就有：

$$\varphi_1(r,\theta)=\frac{\varphi_0^{(1)}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n^{(1)}\cos n\theta+\psi_n^{(1)}\sin n\theta),$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\varphi_n^{(1)}&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(r,\theta)\cos n\theta\,d\theta;\\ \psi_n^{(1)}&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(r,\theta)\sin n\theta\,d\theta\end{aligned}\right.\quad(n=0,1,2,\cdots)。\quad(133)$$

比較这个表达式与(132)中第一个公式，不难求得：

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0^{(1)}=2\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{m,0}^{(1)}J_0(k_m^{(0)}r);\quad \varphi_n^{(1)}=\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{m,n}^{(1)}J_n(k_m^{(n)}r);\\ \psi_n^{(1)}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{m,n}^{(1)}J_n(k_m^{(n)}r)。\end{aligned}\right\}\quad(134)$$

显然系数 $\varphi^{(1)}$ 与 $\psi^{(1)}$ 依賴于 r，这可以由它們的表达式(133)看出来。如此，我們引至把 r 的已知函数展开为依函数 $J_n(k_m^{(n)}r)$ 的級数的問題——对于固定的 n。有了这些表达式，我們就确定出系数 α 与 β，于是所給的問題就完全解决了。

于是，我們来看如何把已知函数 $f(r)$ 展开为下面形状的級数：

$$f(r)=\sum_{m=1}^{\infty}A_mJ_n(k_m^{(n)}r)。\quad(135)$$

我們設这样展开是可能的，并且可以逐項求积分，現在我們只說明如何确定系数 A_m。为了这个目的，我們証明：函数

$$J_n(k_1^{(n)}r),\ J_n(k_2^{(n)}r),\ \cdots,\ J_n(k_m^{(n)}r),\ \cdots$$

具有广义正交性，就是：

$$\text{当}\ \sigma\neq\tau\ \text{时，}\int_0^l J_n(k_\sigma^{(n)}r)J_n(k_\tau^{(n)}r)rdr=0。\tag{136}$$

实际上，若在方程(121)中，用$k_\sigma^{(n)2}$与$k_\tau^{(n)2}$来替换k^2，并分别用$J_n(k_\sigma^{(n)}r)$与$J_n(k_\tau^{(n)}r)$来替换$R_n(r)$，就得到：

$$\frac{d^2J_n(k_\sigma^{(n)}r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)}r)}{dr}+\left(k_\sigma^{(n)2}-\frac{n^2}{r^2}\right)J_n(k_\sigma^{(n)}r)=0,$$

$$\frac{d^2J_n(k_\tau^{(n)}r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dJ_n(k_\tau^{(n)}r)}{dr}+\left(k_\tau^{(n)2}-\frac{n^2}{r^2}\right)J_n(k_\tau^{(n)}r)=0。$$

第一个方程乘以$rJ_n(k_\tau^{(n)}r)$，第二个乘以$rJ_n(k_\sigma^{(n)}r)$，相减并由0到l对r求积分，就得到：

$$(k_\sigma^{(n)2}-k_\tau^{(n)2})\int_0^l J_n(k_\sigma^{(n)}r)J_n(k_\tau^{(n)}r)rdr=$$

$$=\int_0^l\left[\frac{d^2J_n(k_\tau^{(n)}r)}{dr^2}J_n(k_\sigma^{(n)}r)-\frac{d^2J_n(k_\sigma^{(n)}r)}{dr^2}J_n(k_\tau^{(n)}r)\right]rdr+$$

$$+\int_0^l\left[\frac{dJ_n(k_\tau^{(n)}r)}{dr}J_n(k_\sigma^{(n)}r)-\frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)}r)}{dr}J_n(k_\tau^{(n)}r)\right]dr。$$

用分部积分法，我們有：

$$\int\frac{d^2J_n(k_\tau^{(n)}r)}{dr^2}J_n(k_\sigma^{(n)}r)rdr=\frac{dJ_n(k_\tau^{(n)}r)}{dr}rJ_n(k_\sigma^{(n)}r)-$$

$$-\int\frac{dJ_n(k_\tau^{(n)}r)}{dr}\cdot\frac{d[rJ_n(k_\sigma^{(n)}r)]}{dr}dr=\frac{dJ_n(k_\tau^{(n)}r)}{dr}rJ_n(k_\sigma^{(n)}r)-$$

$$-\int\frac{dJ_n(k_\tau^{(n)}r)}{dr}\cdot\frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)}r)}{dr}rdr-\int\frac{dJ_n(k_\tau^{(n)}r)}{dr}J_n(k_\sigma^{(n)}r)dr,$$

同样

$$\int\frac{d^2J_n(k_\sigma^{(n)}r)}{dr^2}J_n(k_\tau^{(n)}r)rdr=\frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)}r)}{dr}rJ_n(k_\tau^{(n)}r)-$$

$$-\int\frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)}r)}{dr}\cdot\frac{dJ_n(k_\tau^{(n)}r)}{dr}rdr-\int\frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)}r)}{dr}J_n(k_\tau^{(n)}r)dr。$$

由此不难引出：

$$(k_\sigma^{(n)2}-k_\tau^{(n)2})\int_0^l J_n(k_\sigma^{(n)}r)J_n(k_\tau^{(n)}r)rdr=$$

$$=r\left[\frac{dJ_n(k_\tau^{(n)}r)}{dr}J_n(k_\sigma^{(n)}r)-\frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)}r)}{dr}J_n(k_\tau^{(n)}r)\right]_{r=0}^{r=l}。$$

依照数$k_\sigma^{(n)}$，$k_\tau^{(n)}$的定义，我們有：

$$J_n(k_\sigma^{(n)}l)=J_n(k_\tau^{(n)}l)=0,$$

由此推知，当 $r=l$ 时上面写的等式的右边等于零。由于存在有因子 r，并且当 $x=0$ 时 $J_n(x)$ 与 $J'_n(x)$ 是有限的，就可以肯定，当取下限 $r=0$ 时右边也等于零，但因在 $p\neq q$ 时 $k_p^{(n)}\neq k_q^{(n)}$，由此推出：

$$\int_0^l J_n(k_p^{(n)}r)J_n(k_q^{(n)}r)rdr=0,$$

于是証完。

証明了公式(136)之后，就不难确定展开式(135)中的系数 A_m 了：在等式(135)的两边乘以 $J_n(k_p^{(n)}r)$，再由 0 到 l 对 r 求积分并利用公式(136)，立刻就求得：

$$\int_0^l f(r)J_n(k_p^{(n)}r)rdr=A_p\int_0^l J_n^2(k_p^{(n)}r)rdr\text{。}$$

于是，我們可以說，只要展开式(135)是可能的并且它可以逐項求积分，則系数 A_m 由下面的公式确定：

$$A_m=\frac{\int_0^l f(r)J_n(k_m^{(n)}r)rdr}{\int_0^l J_n^2(k_m^{(n)}r)rdr}\text{。}$$

現在公式(133)与(134)給出下面的关于系数 $\alpha^{(1)}$ 与 $\beta^{(1)}$ 的表达式：

$$\alpha_{m,0}^{(1)}=\frac{1}{2}\frac{\int_0^l \varphi_0^{(1)}J_0(k_m^{(0)}r)rdr}{\int_0^l J_n^2(k_m^{(0)}r)rdr}=\frac{1}{2\pi\int_0^l J_0^2(k_m^{(0)}r)rdr}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_0^l \varphi_1(r,\theta)J_0(k_m^{(0)}r)rdr,$$

$$\alpha_{m,n}^{(1)}=\frac{1}{\pi\int_0^l J_n^2(k_m^{(n)}r)rdr}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_0^l \varphi_1(r,\theta)\cos n\theta J_n(k_m^{(n)}r)rdr,$$

$$\beta_{m,n}^{(1)}=\frac{1}{\pi\int_0^l J_n^2(k_m^{(n)}r)rdr}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_0^l \varphi_1(r,\theta)\sin n\theta J_n(k_m^{(n)}r)rdr\text{。}$$

利用同样的理由，可以确定出系数 $\alpha^{(2)}$ 与 $\beta^{(2)}$——只是需要在上面的公式中用 φ_2 来替换 φ_1 并把对应的表达式用 $\omega_{m,n}$ 除。

像在矩形膜的情形似的，圆形膜的一般运动是由无穷多的自有調和振动組成的，并且同一的頻率可以对应于无穷多的不同的节綫分布情形：圖 137 上表示出节綫分布的一些情形，附注有对应的頻率，这里取基本音的頻率作 1；圖上还注着有圓周形节綫的半徑，这些半徑是以膜的半徑为 1 計算的。

在任何的界綫的情形，应用富里埃方法时，可以依据公式(106)分出依賴于 t 的因子，就引至方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+k^2U=0,\tag{137}$$

于是需要确定出参变数 k 使得这方程有非零的滿足边值条件(102)的解的那些值以及

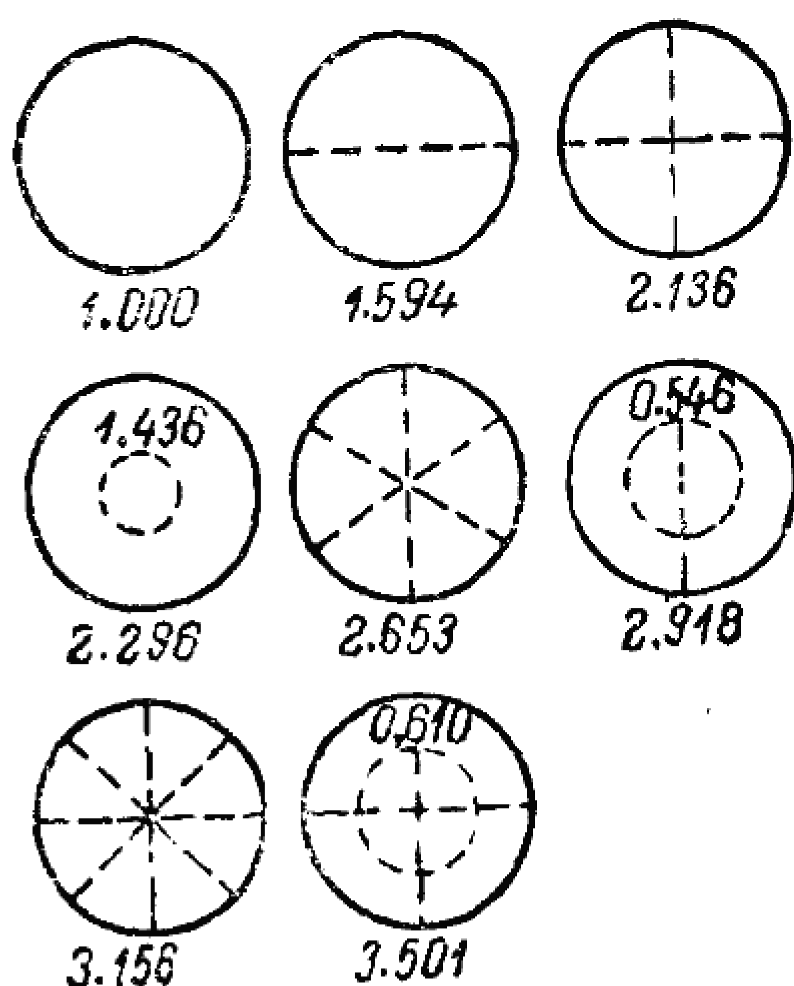


圖 137.

这些个解。在以前的例中我們是繼續借助于变量分离的方法作出来的。在一般情形下不能应用这个方法，就需要直接考虑方程(137)。自然，問題就不能解出显示的形式。在第四卷中我們講这个問題的理論的解法以及一些实际的結果。在三維空間的長方体的情形下，关于波动方程的边值問題像在[177]中一样解决，不过只是要引出三个变量的富里埃級数。球的情形仍然要引用貝塞尔函数。在第三卷中我們較仔細的討論貝塞尔函数的理論时将談到这些。

在解关于多維空間的波动方程的边值問題时，所得出的富里埃級数，它的收歛性的詳細討論将在第四卷里給出。

179. 唯一性定理 現在我們就无界空間的情形，当給定初始条件时，以及存在有边值条件时来証明波动方程的解的唯一性。为了写起来簡單我們算作 $a=1$，这只要在波动方程中用 at 来替換 t 就是了。为确定起見，我們取三个自变量的情形，就是波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{138}$$

并从具有給定在整个平面上初始条件：

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x, y);\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x, y) \tag{139}$$

的問題考慮开始。以前我們已經有了这个問題的解 [**172**]。由 [**172**] 中的方法可以得到这个問題的解的唯一性。現在我們对于唯一性給一个另外的証明，它可以应用于具有边值条件的問題。如果方程 (138) 具有初始条件 (139) 时有两个解 u_1 与 u_2，則差 u_2-u_1 应当滿足方程(138)及齐次初始条件：

$$u\Big|_{t=0}=0;\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0。 \tag{140}$$

需要証明，对于任何的 (x, y) 值和任何的 $t>0$，u 都应当恒等于零。我們考慮三維空間(x, y, t)，在其中取某一点 $N(x_0, y_0, t_0)$ 使 $t_0>0$。以这点为顶点引一个錐面：

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-(t-t_0)^2=0 \tag{141}$$

直到与平面 $t=0$ 相交。再作一个平面 $t=t_1$，其中 $0<t_1<t_0$，設 D 是一个三維的区域，以上述的錐側面 Γ 以及出現在这个錐之內的部分平面 $t=0$ 与 $t=t_1$ 为界(D 是截錐)。不难驗証下面这个簡單的恒等式：

$$2\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]-$$
$$-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\right)。 \tag{142}$$

把它的两边沿上述区域 D 求积分。左边的积分应当等于零，因为 u 是方程 (138) 的解。利用奥斯特洛格拉得斯基公式可以把右边的积分变換为沿区域D的界面的积分：

$$\iint\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\cos(n, t)-\right.$$
$$\left.-2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, x)-2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n, y)\right\}ds。 \tag{143}$$

根据(140)，在截錐D的下底上，函数 u 及其所有的一阶偏导数都

等于零，于是沿下底作的积分(143)等于零。在上底 σ_{t_1} 上，我們有

$$\cos(n, x)=\cos(n, y)=0; \quad \cos(n, t)=1。$$

在錐的側面 Γ 法綫的方向余弦滿足关系式：

$$\cos^2(n, t)-\cos^2(n, x)-\cos^2(n, y)=0,$$

于是沿着 Γ 作的积分(143)可以写成下面的形状：

$$J=\iint_{\Gamma}\frac{1}{\cos(n, t)}\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, t)-\frac{\partial u}{\partial t}\cos(n, x)\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n, t)-\frac{\partial u}{\partial t}\cos(n, y)\right]^2\right\}ds,$$

我們最后得到：

$$J+\iint_{\sigma_{t_1}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]ds=0。$$

在曲面 Γ 上 $\cos(n, t)>0$，于是推知 $J\geqslant 0$，所以：

$$\iint_{\sigma_{t_1}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]ds=0,$$

由此推知，在以 $N(x_0, y_0, t_0)$ 为顶点的整个錐体的內部，在所有的点函数 u 的一阶偏导数等于零，因此，函数 u 本身是常数。根据(140)在錐底上它等于零，于是推知，在点 N，u 也等于零。上面所講的唯一性定理的証明不难推广到关于方程(138)的边值問題的情形。設給定了初始条件及关于平面 (x, y) 上某一区域 B 的界綫 l 的边值条件，要求方程(138)在区域 B 上的解。以 B 为底作一个柱面，使它的母綫平行于 t 軸。这柱面上每一个点对应于区域 B 上一个确定的点以及一个确定的时刻 t。設在区域 B 上我們有零初始条件，并設在区域 B 的界綫 l 上我們有齐次边值条件：

$$u|_l=0。\tag{144}$$

我們来証明，在上述柱面的所有的点，函数 u 等于零。取这样一点 N 并过这点作一个錐(141)。設 D 是界于这个錐的側面、上述柱面以及平面 $t=0$ 与 $t=t_1$ 之間的区域。再把恒等式(142)的

两边沿这个区域求积分。以前的全部理由都有效，只是在右边出現有沿柱面的积分。只要这个积分等于零，则上面的唯一性定理的証明全部有效。在沿柱面的积分中，被积函数与积分(143)的被积函数全同。不过在柱面上我們有 $\cos(n, t)=0$，此外，并且在这柱面上 $\frac{\partial u}{\partial t}=0$。后面这个等式是由下述事实直接推出的：柱面上的点代表在不同的时刻 t 的界綫 l 上的点，而在界綫 l 上对于任何的 t 我們有边值条件(144)。如此，在整个柱面上积分(143)的被积函数等于零，于是上面所講的唯一性定理的証明，对于边値問題叙述时，也完全有效。証明唯一性定理时，我們曾經求(142)右边的表达式沿区域 D 的积分，并且应用了奥斯特洛格拉得斯基公式。只要我們假定函数 u 有直到二阶的連續导数，并且它們在区域 D 内保持有界，这些运算就是完全合法的。

上面我們提到过，在研究有实际意义的問題时，会产生引入所謂广义解的必要性。在第四卷里我們証明，唯一性定理对于这类更广泛的广义解也成立。

180. 富里埃积分的应用　現在我們在直綫的情形对于半无界区域 $x \geqslant 0$ 来考虑波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{145}$$

这个方程具有初始条件

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x) \quad (x \geqslant 0) \tag{146}$$

以及边値条件

$$u|_{x=0}=0。 \tag{147}$$

用[166]中所講的方法不难解决这个問題。实际上，只要依照奇函数的規律把給定在区間 $(0, +\infty)$ 上的函数 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 延續到区間 $(-\infty, 0)$ 上，然后再应用关于无界弦的公式(17)。在这公式中讓 $x=0$，我們得到：

$$u|_{x=0}=\frac{\varphi(-at)+\varphi(at)}{2}+\int_{-at}^{+at}\varphi_1(z)\,dz,$$

由于 $\varphi(z)$ 与 $\varphi_1(z)$ 的延續的奇性，这两項都等于零，所以边値条件确实满足。

若对于所給的問題应用富里埃法，則替代富里埃級数我們得到富里埃积分。我們在[167]中看到，考虑到边值条件应用富里埃法时引至下面形状的解：

$$u=(A\cos akt+B\sin akt)\sin kx。$$

因为沒有第二个边値条件，所以參变数 k 的所有的值都是被允許的，就是說，半无界弦可能有的頻率 k 是完完全全的。替代我們在[167]中应用过的依 k 的各别的值求和，在这情形下，我們应当对參变数 k 求积分，自然要算作 A 与 B 是 k 的函数。如此，我們得到：

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}[A(k)\cos akt+B(k)\sin akt]\sin kx\,dk \tag{148}$$

函数 $A(k)$ 与 $B(k)$ 应当由初始条件(146)来确定。它們給出：

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}A(k)\sin kx\,dk;\\ \varphi_1(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}ak\,B(k)\sin kx\,dk。\end{aligned}\right\} \tag{149}$$

比較这两个公式以及关于奇函数的富里埃公式

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^{\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt\right]\sin\alpha x\,d\alpha,$$

我們就确定出函数 $A(k)$ 与 $B(k)$：

$$A(k)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\varphi(\xi)\sin k\xi\,d\xi;$$

$$B(k)=\frac{1}{\pi ak}\int_0^{\infty}\varphi_1(\xi)\sin k\xi\,d\xi,$$

代入到公式(148)中，就得到这个問題的解：

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_0^{\infty}\left[\varphi(\xi)\cos akt+\frac{1}{ak}\varphi_1(\xi)\sin akt\right]\sin k\xi\sin kx\,d\xi\right\}dk,$$

或者，注意被积函数作为 k 的函数是偶函数：

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}\left[\varphi(\xi)\cos akt+\frac{1}{ak}\varphi_1(\xi)\sin akt\right]\sin k\xi\,d\xi\right\}\sin kx\,dk。$$

在 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 是奇函数的条件下，利用富里埃公式，不难相信，这公式的右边与公式(17)的右边全同。

完全类似的可以考虑方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)$$

关于半平面 $y\geqslant0$ 的边值問題，它具有边值条件

$$u|_{y=0}=0 \tag{150}$$

以及任何的初始条件：

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x,y);\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x,y) \tag{151}$$

$$(-\infty<x<+\infty,\quad y\geqslant0)。$$

在把函数 $\varphi(x, y)$ 与 $\varphi_1(x, y)$ 依变量 y 作奇性延續到区間 $(-\infty, 0)$ 上的条件下，不难驗証，公式(80)就給出这个問題的解。实际上，当 $y=0$ 时，公式(80)的第一項可以写成下面的形状：

$$\frac{1}{2\pi a}\int_{x-at}^{x+at}\left[\int_{-\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}}^{+\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}}\frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-\beta^2}}\,d\beta\right]d\alpha,$$

对于任何的 x 与 t，里边的积分等于零，因为被积函数是 β 的奇函数。完全类似的，公式(80)的第二項也等于零，所以实际上满足条件(150)。对于所考虑的这个問題也可以应用富里埃法，这就要利用富里埃积分来表示两个变数的函数。驗証用这样的方法所得到的解与由公式(80)所确定的解的全同，是比在直綫的情形較为艰巨的。完全类似的，可以在半空間 $z\geqslant 0$ 当具有边值条件 $u|_{z=0}=0$ 时考虑波动方程。在无界的情形，只有初始条件时，对于波动方程的解也可以应用富里埃法。不过应用富里埃法比我們以上用的方法会引至較复杂的計算。

§18. 电报方程

181. 基本方程 以上討論的两种方法：特征綫法(达朗倍尔)与駐波法(富里埃)，可以有效的应用于电报方程的討論，这个方程在沿着电纜的似稳电振动的傳播理論中有基本的作用。

設有由一来一往的导綫 l 組成的綫路。我們算作沿着整个綫路均匀分布的有依照單位長計算的欧姆电阻 R，自感 L，电容 C 以及絕緣电漏 A，这个情形与我們在[I, 181]中所討論的不同，那时电阻，自感与电容是集中在綫路的几个各别的点的，而在綫路的其余部分我們忽略不計。用 v 与 i 来記在綫路的距离一端 $x=0$ 为 x 的断面处的电动势与电流强度。x 与 t 的这两个函数由两个微分方程連系着，我們現在引出这两个方程。

对于綫路的單元 dx 应用感应定律，我們应当写成，在这單元上的电动势降落

$$v-(v+dv)=-dv=-\frac{\partial v}{\partial x}dx$$

是由欧姆电阻与自感所产生的 $Rdx\cdot i$ 与 $Ldx\,\frac{\partial i}{\partial t}$ 形成的，用 dx 除就得到

$$\frac{\partial v}{\partial x}+L\,\frac{\partial i}{\partial t}+Ri=0。\tag{1}$$

再者，在进入与穿出單元 dx 的两点間的电流强度差

$$i-(i+di)=-di=-\frac{\partial i}{\partial x}dx$$

是由負載电流 $Cdx\frac{\partial v}{\partial t}$ 与电漏电流 $Adx\cdot v$ 形成的，这就給出

$$\frac{\partial i}{\partial x}+C\,\frac{\partial v}{\partial t}+Av=0。\tag{2}$$

在綫路的两端应当滿足的边值条件具有很重要的意义。如果綫路的端是开的，則在这端我們应当有

$$i=0\quad(当\ x=0\ 或\ x=l\ 时)。\tag{3}$$

一般說来，如果在綫路的一端是由外电动势 E，电阻 r 与自感 λ 关閉的，則在这端我們应当有：

$$v=E+ri+\lambda\,\frac{di}{dt}\quad(当\ x=0\ 或\ x=l\ 时)。\tag{4}$$

特别是，例如，如果一端 $x=0$ 受有电动势 E 的作用，而另一端 $x=l$ 短路封閉，我們就有

$$v|_{x=0}=E,\quad v|_{x=l}=0。\tag{5}$$

182. 稳定过程 我們先就稳定过程談一談，設作用在綫路上的外电动势（1）或者是常量，（2）或者是正弦量，在第一种情形我們算作 v 与 i 不依賴于 t。

1. 在第一种情形下，方程（1）与（2）給出

$$\frac{dv}{dx}+Ri=0,\quad \frac{di}{dx}+Av=0。\tag{6}$$

由第一个方程求导数并注意第二个方程，就得到

$$\frac{d^2v}{dx^2}-RAv=0_{\circ} \tag{7}$$

依照[27]中所講的方法立刻可以确定出函数 v，我們求得：

$$v(x)=C_1e^{bx}+C_2e^{-bx}, \tag{8}$$

其中 $$b=\sqrt{RA}_{\circ}$$

确定了 v，再由（6）中第一个方程就求得 i：

$$i(x)=-\frac{1}{R}\frac{dv}{dx}=-\frac{b}{R}\left(C_1e^{bx}-C_2e^{-bx}\right)_{\circ} \tag{9}$$

例 在綫路的一端受有常电动势 E 的作用，而在另一端短路封閉的情形我們有条件（5），由这个条件可以确定在公式（8）中出現的任意常数。

$$C_1+C_2=E;\quad C_1e^{bl}+C_2e^{-bl}=0,$$

由此 $$C_1=-\frac{E}{e^{2bl}-1}=-\frac{Ee^{-bl}}{e^{bl}-e^{-bl}},\quad C_2=\frac{Ee^{bl}}{e^{bl}-e^{-bl}},$$

代入到公式（8）中就得到：

$$v(x)=E\frac{e^{b(l-x)}-e^{-b(l-x)}}{e^{bl}-e^{-bl}}=E\frac{\operatorname{sh}b(l-x)}{\operatorname{sh}bl}, \tag{10$_1$}$$

于是公式（9）給出

$$i(x)=E\sqrt{\frac{A}{R}}\frac{\operatorname{ch}b(l-x)}{\operatorname{sh}bl}_{\circ} \tag{10$_2$}$$

2．現在設在綫路上有周期固定为 ω 的正弦量的外电动势的作用；这时我們可以像在[I, 180]中所作的一样由实际的物理量轉变为矢量，并把强迫振动了解为綫路上电流与电动势的同周期 ω 的正弦量的振动。回忆[I, 180]中的法則，引用电流矢量 $\boldsymbol{I}$ 与电动势矢量 $\boldsymbol{V}$，在所考虑的情形下，它們依賴于 x，我們可以把微分方程（1）与（2）改写为下面的形狀：

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dx}+(R+i\omega L)\boldsymbol{I}=0;\quad \frac{d\boldsymbol{I}}{dx}+(A+i\omega C)\boldsymbol{V}=0_{\circ} \tag{11}$$

由第一个方程对 x 求导数并利用第二个方程，消去 $\boldsymbol{I}$ 就得到：

$$\frac{d^2\boldsymbol{V}}{dx^2}-(R+i\omega L)(A+i\omega C)\boldsymbol{V}=0,$$

不难証明，对于 $\boldsymbol{I}$ 可以得到完全同样的方程。

因而，$\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 是同一个二阶微分方程的解。应用[27]中的方法并規定

$$(R+i\omega L)(A+i\omega C)=\varkappa^2, \tag{12}$$

就有：

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}_1e^{\varkappa x}+\boldsymbol{A}_2e^{-\varkappa x}, \tag{13}$$

其中 A_1 与 A_2 是任意常矢量。代入到(11)的第一个方程中，就确定出矢量

$$I=-\frac{1}{R+i\omega L}\frac{dV}{dx}=\sqrt{\frac{A+i\omega C}{R+i\omega L}}(A_2e^{-\varkappa x}-A_1e^{\varkappa x})。\tag{14}$$

为了徹底解决这个問題，还应当确定出常矢量 A_1 与 A_2，这可以利用两个边値条件来作（自然这里不必談初始条件），并且替代对于每一端分别給一个条件，也可以对于同一端給两个条件，例如，給出电动势矢量与电流矢量。

无論如何，公式(13)与(14)确定出强迫振动矢量，它們依賴于 x，就是說，沿着綫路振幅与相都改变。把每一个矢量 $(m+ni)$ 用复变量平面上的点来表示并把 x 由 0 改变到 l，对于 V 与 I 就得到两条曲綫——电动势与电流的矢量图。确定这两条曲綫时，一般說来，应当把 $\varkappa$ 了解作是复数，設

$$\varkappa=a+ib,$$

我們就有：

$$V=A_1e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)+A_2e^{-ax}(\cos bx-i\sin bx)。$$

右边的每一項給出一条螺綫[I, 183]，由这两条螺綫用“几何相加”的方法就得到 V；曲綫 V 上对应于 x 的任何一个値的点的矢徑，就等于这两条螺綫上对应于 x 的同一个値的点的矢徑的几何和，对于矢量 I 可以同样来作。引进因子

$$\nu=\sqrt{\frac{R+i\omega L}{A+i\omega C}},\tag{15}$$

它叫做波阻，关于 V 与 I 的表达式就可以写成下面的形状

$$V=A_1e^{\varkappa x}+A_2e^{-\varkappa x};\quad I=\frac{1}{\nu}(A_2e^{-\varkappa x}-A_2e^{\varkappa x})。\tag{16}$$

如果我們由矢量形式轉換为普通形式，那末，关于未知函数 v 与 i 就得到下面形状的表达式：

$$v=V(x)\sin[\omega t+\psi(x)];\quad i=I(x)\sin[\omega t+\chi(x)],\tag{17}$$

它們給出与外力同周期 ω 的調和振动，其中振幅 $V(x)$ 与 $I(x)$ 以及相 $\psi(x)$ 与 $\chi(x)$ 都依賴于所考虑的綫路的断面的位置。

3. 一端受有正弦量的电动势的作用另一端是开的綫路。把在端点 $x=0$ 的已知电动势矢量記作 V_0。除方程(11)外，我們还有边値条件：

$$V_0|_{x=0}=V_0;\quad I|_{x=l}=0,$$

根据公式(16)，它們給出：

$$A_1+A_2=V_0;\quad A_2e^{-\varkappa l}-A_1e^{\varkappa l}=0。$$

解这两个方程并代入到方程(16)中，不难求得：

$$V=V_0\frac{\operatorname{ch}\varkappa(l-x)}{\operatorname{ch}\varkappa l};\quad I=\frac{V_0}{\nu}\cdot\frac{\operatorname{sh}\varkappa(l-x)}{\operatorname{ch}\varkappa l}。$$

当 $x=0$ 时，我們得到在点 $x=0$ 的复数电阻：

$$\varphi_0=\nu\frac{\operatorname{ch}\varkappa l}{\operatorname{sh}\varkappa l}。$$

183. 暂态过程 現在我們来比較在同一个綫路中受有不同的外在因素的作用时的两种强迫振动的型态，我們用番号（I）与（II）来記这两种振动。把振动型态（I）的电动势与电流記作 v_1 与 i_1，型态（II）的同样的量記作 v_2 与 i_2。

如果我們突然改换外在的条件，把使振动（I）在进行的条件换成应当得到型态（II）的条件，那时系統并不立刻由（I）变换为（II），而在多多少少的一个長期的时間区間，理論上講这个区間可以是无穷的，但实际是有限的，在綫路中發生自由振动（或暂态的），这个振动我們用电动势 v 与电流 i 的大小来表現，并且我們将算作在轉換过程的时間中，綫路的状态是由状态（II）与这自由阻尼振动相加得来的，就是說，轉換过程中电动势与电流由下面的和来确定：

$$v_2+v;\quad i_2+i。\tag{18}$$

当 $t=0$ 时，就是在轉換过程开始时，这两个和应該是 v_1 与 i_1。函数 v 与 i 应当滿足 [**181**] 中的微分方程（1）与（2）以及边值条件（3）或（4），这要看在两端的条件。此外，它們还应当滿足下面形状的初始条件：

$$\left.\begin{aligned}v|_{t=0}&=(v_1-v_2)|_{t=0}=g(x);\\ i|_{t=0}&=(i_1-i_2)|_{t=0}=\sqrt{\frac{C}{L}}\,h(x)\text{①}。\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

我們不直接来求未知函数 v 与 i，而通过一个新的未知函数 w 来表达它們，为此我們設：

$$v=\frac{\partial w}{\partial x}。$$

① 引进因子 $\sqrt{\frac{C}{L}}$ 是为了簡化以下的計算的。

这时方程（2）給出：

$$\frac{\partial i}{\partial x}+C\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+A\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(i+C\frac{\partial w}{\partial t}+Aw\right)=0,$$

由此

$$i+C\frac{\partial w}{\partial t}+Aw=c,$$

其中 c 不依賴于 x，我們可以算作 $c=0$，这并不失去一般性，因为对于 w 可以加上不依賴于 x 的任意一項，这并不改变 $v=\frac{\partial w}{\partial x}$。

于是我們有：

$$v=\frac{\partial w}{\partial x},\ i=-C\frac{\partial w}{\partial t}-Aw, \tag{20}$$

满足方程（2）。把(20)代入到方程（1）中，就得到函数 $w(x, t)$ 应当满足的方程，就是：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)-L\frac{\partial}{\partial t}\left(C\frac{\partial w}{\partial t}+Aw\right)-R\left(C\frac{\partial w}{\partial t}+Aw\right)=0,$$

或

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-(LA+RC)\frac{\partial w}{\partial t}-RAw=0。 \tag{21}$$

这个方程叫做电报方程。

为要簡化这个方程，我們依照下面的公式引用一个新的未知函数 $u(x, t)$：

$$w(x, t)=e^{-\mu t}u(x, t), \tag{22}$$

并設法选擇常因子 μ 以使得在方程不含有 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 的項。求导数并消去 $e^{-\mu t}$ 就得到：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-LC\left(\mu^2 u-2\mu\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)-$$

$$-(LA+RC)\left(-\mu u+\frac{\partial u}{\partial t}\right)-RAu=0,$$

于是对于这个綫路的方程只須依照下面这条件来选擇 μ：

$$2\mu LC-(LA+RC)=0,$$

就是

$$\mu=\frac{LA+RC}{2LC}。\tag{23}$$

代入这个 μ 的值，經过簡單的变換就得到关于 u 的方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\delta^2 u,\tag{24}$$

其中

$$\delta=\frac{LA-RC}{2LC}。$$

先取 δ 可以忽略不計或是它恰好等于零的情形，也就是

$$\frac{R}{L}=\frac{A}{C}。\tag{25}$$

在这情形下

$$\mu=\frac{R}{L},\tag{26}$$

我們設

$$\frac{1}{LC}=a^2,\tag{27}$$

关于 u 就得到以前討論过的方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}。\tag{28}$$

它的一般解是[**164**]；

$$u(x,t)=\theta_1(x-at)+\theta_2(x+at),\tag{29}$$

常数 $a=\sqrt{\frac{1}{LC}}$ 給出沿着电纜扰动的傳播速度。公式(22)給出：

$$w(x,t)=e^{-\mu t}[\theta_1(x-at)+\theta_2(x+at)],$$

最后由公式(20)得到：

$$v(x,t)=\frac{\partial w}{\partial x}=e^{-\mu t}[\theta_1'(x-at)+\theta_2'(x+at)],$$

$$i(x, t) = -C\frac{\partial w}{\partial t} - Aw = -e^{-\mu t}[-aC\theta_1'(x-at) +$$

$$+aC\theta_2'(x+at) - \mu C\theta_1(x-at) - \mu C\theta_2(x+at) +$$

$$+A\theta_1(x-at) + A\theta_2(x+at)] = aCe^{-\mu t}[\theta_1'(x-at) - \theta_2'(x+at)],$$

因为根据(26)与(25)，显然 $\mu C = A$，于是后面几项相消了。直接引用函数

$$\varphi_1(x) = \theta_1'(x); \quad \varphi_2(x) = \theta_2'(x)$$

来代替任意函数 θ_1 和 θ_2 比較方便些，于是結果得到关于 v 与 i 的下面形状的表达式：

$$\left.\begin{aligned} v(x, t) &= e^{-\mu t}[\varphi_1(x-at) + \varphi_2(x+at)], \\ i(x, t) &= \frac{e^{-\mu t}}{\alpha}[\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x+at)], \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

为簡短起見，这里設 $\alpha = \sqrt{\frac{L}{C}}$。这就是我們以后要利用的表达式。函数 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 要由初始条件(19)来确定，它們給出：

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = g(x); \quad \varphi_1(x) - \varphi_2(x) = h(x),$$

由此

$$\varphi_1(x) = \frac{g(x)+h(x)}{2}; \quad \varphi_2(x) = \frac{g(x)-h(x)}{2}。 \tag{31}$$

如果函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 或者 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 在整个区間 $(-\infty, +\infty)$ 上是已知的，这个問題就算是解决了；可是事实上，它們只在区間 $(0, l)$ 上是已知的，因而为要利用所得到的解，就需要把它們延續到这区間之外。这可以像在弦的情形中似的借助于边値条件来作，这里，这个延續的物理意义无非是由綫路的两端产生的波的一种或他种形状的反射。

所得到的解(30)对应的現象就类似于以前我們在弦的情形所討論的現象。这里我們有两个波，正的以及反的，它們达到两端时，被反射回来。与弦的情形所不同的是有因子 $e^{-\mu t}$ 存在，这个因

子随着时間逐漸下降，而引起振动的阻尼，指数 μ 是阻尼的对数指标，它愈大时下降的愈快。

184．例　如果一端 $x=l$ 是开的，則根据(30)由条件

$$i|_{x=l}=0$$

得到

$$\varphi_2(l+at)=\varphi_1(l-at)$$

或者用 x 替换 at

$$\varphi_2(l+x)=\varphi_1(l-x),$$

就是說，在这一端，波的反射保持大小与符号都不变，因为函数 $\varphi_2(x)$ 是函数 $\varphi_1(x)$ 的偶延續。当然，如果点 $x=0$ 是开端，仍会得到同样的結果。

如果在一端 $x=l$ 短路封閉，就是說

$$v|_{x=l}=0,$$

則注意(30)并用 x 替换 at，就得到：

$$\varphi_2(l+x)=-\varphi_1(l-x),$$

就是說，波的反射保持絕对大小，但要变号，因为函数 $\varphi_2(x)$ 是函数 $\varphi_1(x)$ 的奇延續。以下的延續像在弦的情形一样。

1．在綫路的开端加入一个频率为 ω 的变的調和电流。我們在[182]講过的頻率为 ω 的調和振动

$$v_2=V(x)\sin[\omega t+\psi(x)];\quad i_2=I(x)\sin[\omega t+\chi(x)]$$

就对应于結果的稳定状态(II)。

如果在开通的綫路上不加入什么，則我們有：

$$v_1=0,$$
$$i_1=0。$$

所以，根据公式(19)，初始条件是：

$$v|_{t=0}=-V(x)\sin\psi(x)=g(x),$$
$$i|_{t=0}=-I(x)\sin\chi(x)=\frac{1}{\alpha}h(x)。$$

边值条件如下：在开端 $x=l$ 应有：

$$i|_{x=l}=0。$$

在另一端 $x=0$ 我們应当算作

$$v|_{x=0}=0,$$

因为在考虑暫态过程中，我們的兴趣只在于由具有頻率为 ω 的强迫振动的綫路的初始条件的不同所發生的振动。我們依照公式(31)來确定函数 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$，然后在端点 $x=l$ 作偶性延續，在端点 $x=0$ 作奇性延續。

2．我們考虑在初始条件

$$v|_{t=0}=-E;\quad i|_{t=0}=0,$$

其中 E 是常数，以及边值条件

$$v|_{x=0}=0;\quad i|_{x=l}=0$$

下發生的阻尼过程。公式(31)給出

$$\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=-\frac{E}{2}\quad(0<x<l),$$

而由边值条件我們得到

$$\varphi_1(-x)=-\varphi_2(x);\quad \varphi_1(l-x)=\varphi_2(l+x),\tag{32}$$

由此看出，由 $\varphi_1(x)$ 作偶延續得到在区間 $(l,\ 2l)$ 上的 $\varphi_2(x)$，由 $\varphi_2(x)$ 作奇延續得到在区間 $(-l,\ 0)$ 上的 $\varphi_1(x)$，就是說

$$\varphi_2(x)=-\frac{E}{2}\quad(0<x<2l),$$

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\dfrac{E}{2} & (-l<x<0),\\ -\dfrac{E}{2} & (0<x<l)。\end{cases}$$

在(32)的第二个方程中用 $(l+x)$ 来替换 x，并由所得到的等式与(32)中第一个等式比較，就有：

$$\varphi_2(2l+x)=-\varphi_2(x),$$

同样不难得到：

$$\varphi_1(2l-x)=-\varphi_1(-x),$$

就是說，函数 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 当变量加上 $2l$ 时改变符号，于是它們的周期是 $4l$。

依据全部叙述，不难看出，函数 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 全同而具有如圖 138 所示的圖形。

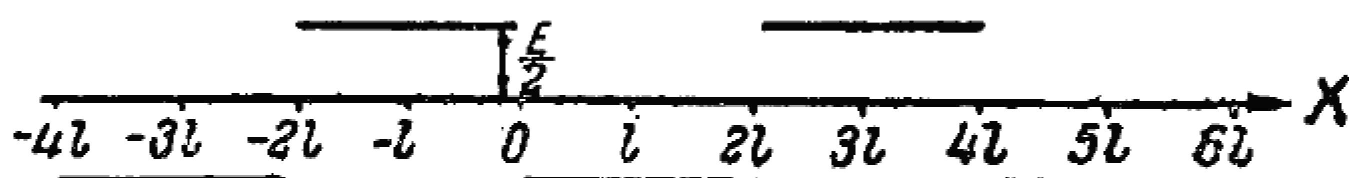


圖 138.

为要得到 v 与 i 的值，我們以速度 a 向左右移动这个圖形，对于 v 取縱坐标的半和乘以 $e^{-\mu t}$，对于 i 取縱坐标的半差乘以 $\frac{1}{a}e^{-\mu t}$。

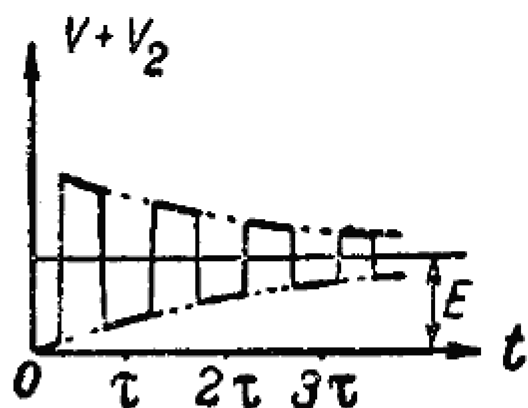


圖 139.

圖 139 上表示出在一端 $x=l$ 电压的圖形，其中对于自由振动 v 加上了稳定的 $v_2=E$。字母 $\tau=\frac{4l}{a}$ 記自由振动的周期。

如果在一端 $x=l$ 加入欧姆电阻 r_l，自感 λ_l，以及电容 γ_l，則条件(4)給出把函数 $\varphi_2(x)$ 延續到区間 $(l,\ 2l)$ 上的关系式：

$$e^{-\mu t}[\varphi_1(l-at)+\varphi_2(l+at)]=\left[r_l+\lambda_l\frac{d}{dt}\right]\left\{\frac{e^{-\mu t}}{\alpha}[\varphi_1(l-at)-\varphi_2(l+at)]\right\}。\quad(33)$$

如果在变量中用 x 来换替 at，則它就是用以确定未知函数

$$\Phi(x)=\varphi_2(l+x)\quad(0<x<l)$$

的微分方程。

利用在另一端 $x=0$ 的边值条件，对于把 $\varphi_1(x)$ 延續到区間 $(-l, 0)$ 上的情形我們会得到类似的結果。

3. 在 $x=l$ 一端只加入欧姆电阻 r_l。这时等式(33)要换成下面的形狀：

$$e^{-\mu t}[\varphi_1(l-at)+\varphi_2(l+at)]=r_l\frac{e^{-\mu t}}{\alpha}[\varphi_1(l-at)-\varphi_2(l+at)],$$

由此，引用 x 替代 at，就确定出 $\varphi_2(l+x)$：

$$\varphi_2(l+x)=q\varphi_1(l-x),\qquad 其中\ q=\frac{r_l-\alpha}{r_l+\alpha}。\quad(34)$$

如此，在这情形下，波在 $x=l$ 一端反射时要乘以因子 q。显然，$|q|\leqslant 1$ 就是說，波的絕对值减小，于是發生吸收。当 $r_l=\alpha$ 时，这个因子等于零，于是發生波的完全吸收；当 $r_l=\infty$ 时，因子 $q=1$，于是我們得到的波的反射没有改变，这是可以想到的，因为这个情形就相当于开的(不是閉的)綫路。

用这样的方法把 $\varphi_2(x)$ 延續到区間 $(l, 2l)$ 上，并用对应的方法把 $\varphi_1(x)$ 延續到区間 $(-l, 0)$ 上，再依照公式(34)就把 $\varphi_2(x)$ 延續到区間 $(2l, 3l)$ 上，依此类推。

这时自然我們得不到周期函数，并且如果 $|q|<1$，則当繼續反射时就發生愈來愈强烈的吸收。如此，当 $x>0$ 时函数 $\varphi_2(x)$ 就被确定了，当 $x<l$ 时函数 $\varphi_1(x)$ 就确定了；这正是我們所需要的，因为 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 所依賴的两个变量 $(x-at)$ 与 $(x+at)$ 恰好适合这两个不等式。

185. 推广的弦振动方程 我們就 $\delta=0$ 这特殊情形考虑过了电报方程。在轉到一般情形之前，我們現在先討論推广到綫性情形的波动方程：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+a_1\frac{\partial v}{\partial x}+a_2\frac{\partial v}{\partial t}+a_3 v,\quad(35)$$

其中第一个系数 a^2 我們算作是正的，其余的可以有任何的符号。我們由公式

$$v=e^{\alpha t+\beta x}u,\quad(36)$$

引用新的未知函数 u 来替代 v，像上面一样，我們証明，总可以选

擇数 α 与 β 使得沒有含有一阶偏导数的項。将表达式(36)代入到方程(35)中,消去 $e^{\alpha t+\beta x}$ 再合并相似項,就引出方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(a_1+2a^2\beta)\frac{\partial u}{\partial x}+(a_2-2\alpha)\frac{\partial u}{\partial t}+$$
$$+(a_3+a^2\beta^2+a_1\beta+a_2\alpha-\alpha^2)u=0,$$

讓 $\alpha=\frac{a_2}{2}$; $\beta=-\frac{a_1}{2a^2}$, 就得到下面形状的方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c^2u, \tag{37}$$

其中系数 c^2 可能是正的, 也可能是負的, 就是說, 我們应当算作 c 或者是正数或者是虛数。

我們对于无穷的 X 軸来解方程(37),使有初始条件

$$u\big|_{t=0}=0;\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\omega(x)。 \tag{38}$$

替代由公式(37) 与 (38)所确定的这一个問題,我們来考慮由下面的方程以及初始条件所确定的另一个問題:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{39$_1$}$$

$$w\big|_{t=0}=0;\quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=w(x)e^{\frac{c}{a}y}。 \tag{39$_2$}$$

依照[**172**]中公式(80),可以直接写出这个問題的解:

$$w(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C_{at}}\frac{\omega(\alpha)e^{\frac{c}{a}\beta}d\alpha d\beta}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}},$$

其中 C_{at} 是以 (x, y) 为心、at 为半徑的圓。引用新的变量 $\alpha'=\alpha-x$ 与 $\beta'=\beta-y$ 来替代 α 与 β, 把上面写的二重积分变换为沿以原点为心、at 为半徑的圓 C'_{at} 的二重积分:

$$w(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C'_{at}}\frac{\omega(\alpha'+x)e^{\frac{c}{a}(\beta'+y)}d\alpha'd\beta'}{\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2-\beta'^2}}$$

或者，把$e^{\frac{c}{a}y}$提到积分号之外，可以写成：

$$w(x, y, t)=e^{\frac{c}{a}y}u(x, t), \tag{40}$$

其中第二个因子

$$u(x, t)=\frac{1}{2\pi a}\iint_{C'_{at}}\frac{\omega(\alpha'+x)e^{\frac{c}{a}\beta'}\,d\alpha'd\beta'}{\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2-\beta'^2}} \tag{41}$$

显然已經不依賴于y。我們証明，表达式(41)就是我們的根本的問題的解，就是說，它滿足方程(37)及初始条件(38)。实际上，w满足方程(39_1)，把表达式(40)代入到方程(39_1)中，消去$e^{\frac{c}{a}y}$之后就得到关于u的方程(37)。由关于w的初始条件(39_2)及公式(40)可以直接得到关于u的初始条件。于是公式(41)給出方程(37)的滿足初始条件(38)的解。現在我們把这公式右边的表达式变換为另一个形状。

把沿C'_{at}的二重积分化为两次积分：

$$u(x, t)=$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\int_{-at}^{+at}\left[\int_{-\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2}}^{+\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2}}\frac{e^{\frac{c}{a}\beta'}}{\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2-\beta'^2}}d\beta'\right]\omega(\alpha'+x)\,d\alpha'。 \tag{42}$$

在里边的积分中，依照公式$\beta'=\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2}\sin\varphi$引用新的积分变量$\varphi$来替代$\beta'$，把这个积分化为下面的形状：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}e^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2}\sin\varphi}\,d\varphi$$

或者，引用由这个积分所确定的依賴于参变量z的新的超越函数$I(z)$：

$$I(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}e^{z\sin\varphi}\,d\varphi, \tag{43}$$

就可以把公式(42)写成下面的形状：

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a}\int_{-at}^{+at} I\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2}\right)\omega(\alpha'+x)d\alpha',$$

或者,引用积分变量 $\alpha=\alpha'+x$:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} I\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}\right)\omega(\alpha)d\alpha。$$

把所得到的解对 t 求导数, 像在 [171] 中一样, 就得到方程(37)的一个新的解 $u_1=\frac{\partial u}{\partial t}$,它不满足初始条件(38),而满足条件

$$u\big|_{t=0}=\omega(x);\quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0。\tag{44}$$

为要得到方程(37)的满足一般形状的初始条件:

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x);\quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\varphi_1(x)\tag{45}$$

的解,只须在初始条件(38)中取 $\omega(x)=\varphi_1(x)$,在初始条件(44)中取 $\omega(x)=\varphi(x)$, 再把关于 u 的对应的表达式相加,这就引出下面的公式:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} I\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}\right)\varphi_1(\alpha)d\alpha+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} I\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}\right)\varphi(\alpha)d\alpha\right]。\tag{46}$$

依上限下限并且在积分号下对 t 求导数, 并注意, 根据(43) $I(0)=1$,就可以把公式(46)写成下面的形状:

$$u(x,\ t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} I\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}\right)\varphi_1(\alpha)d\alpha+$$

$$+\frac{ct}{2}\int_{x-at}^{x+at}\frac{1}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}}I'\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}\right)\varphi(\alpha)d\alpha,\tag{47}$$

其中 $I'(z)$ 記 $I(z)$ 对 z 的导数。

現在我們来建立函数 $I(z)$ 与附标为零的貝塞尔函数[48]

$$J_0(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(s!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \tag{48}$$

之間的联系。

展开 $e^{z\sin\varphi}$ 为幂級数

$$e^{z\sin\varphi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n\sin^n\varphi}{n!},$$

再把这个級数沿区間$\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$逐項求积分，由于这个級数的一致收斂性是可能的，我們得到：

$$I(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi\,d\varphi,$$

当 n 是奇数时，所写的积分显然等于零，n 是偶数 $n=2s$ 时我們有[**I**, **100**]：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{2s}\varphi\,d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2s}\varphi\,d\varphi=\frac{(2s-1)(2s-3)\cdots1}{2s\cdot(2s-2)\cdots2}\pi,$$

由此推知

$$I(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{z^{2s}}{(2s)!}\cdot\frac{(2s-1)(2s-3)\cdots1}{2s\cdot(2s-2)\cdots2},$$

或

$$I(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{(s!)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2s}。 \tag{49}$$

比較这个展开式与(48)，我們就得到：

$$I(z)=J_0(iz)。 \tag{50}$$

186. 无界綫路的一般情形　我們現在轉来考虑关于无界綫路的电报方程。我們預先提出，在[**183**]中所得到的关于輔助函数 w 的方程(21)，也是电动势 v 以及电流 i 分别应当满足的。

实际上，我們回到根本的方程(1)与(2)并消去 i。为此，我們把方程(1)对 x 求导数，并用由方程(2)得来的 $\frac{\partial i}{\partial x}$ 的表达式

来代入，就得到：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+L\frac{\partial^2 i}{\partial t\partial x}+R\frac{\partial i}{\partial x}=0,$$

就是

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-L\frac{\partial}{\partial t}\left(C\frac{\partial v}{\partial t}+Av\right)-R\left(C\frac{\partial v}{\partial t}+Av\right)=0,$$

于是关于 v 我們得到方程(21)：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-(LA+RC)\frac{\partial v}{\partial t}-RAv=0。\tag{51}$$

如果我們着手由方程(1)与(2)消去电动势 v，关于 i 也会得到同样的方程。

确定了 v 就可以求 i，使得它满足方程(1)与(2)。例如，利用方程(2)，我們得到

$$i=-\int\left(C\frac{\partial v}{\partial t}+Av\right)dx+B(t),\tag{52}$$

其中积分是对 x 来求的，把 t 看作常数，$B(t)$ 暂时是 t 的任意函数。把 i 的这个表达式代入到方程(1)中并在积分号下对参变量 t 求导数，就得到：

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\int\left(LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+LA\frac{\partial v}{\partial t}\right)dx-\int\left(RC\frac{\partial v}{\partial t}+RAv\right)dx+$$
$$+LB'(t)+RB(t)=0。\tag{53}$$

根据(51)，前三項对 x 求导数要得到零，就是說，这个和是一个变量 t 的某一个已知函数，于是我們得到确定 $B(t)$ 的一阶綫性方程。求它的积分时所得到的任意常量通常是由初始条件确定的。

像以前[183]一样，将方程(51)化成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C^2u\tag{54}$$

的形状，只要利用代换

$$v(x, t)=e^{-\mu t}u(x, t) \tag{55}$$

就行了，这里的

$$\mu=\frac{LA+RC}{2LC}, \quad c=\frac{|LA-RC|}{2LC}。 \tag{56}$$

如果当 $t=0$ 时沿着綫路給定了 v 与 i，从而就知道了当 $t=0$ 时 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial i}{\partial x}$，而方程(1)与(2)給出当 $t=0$ 时 $\frac{\partial v}{\partial t}$ 与 $\frac{\partial i}{\partial t}$。如此，我們可以算作，与方程(51)一起，我們有普通的初始条件：

$$v|_{t=0}=\Phi(x); \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=\Psi(x)。 \tag{57}$$

利用(55)，我們就得到下面的关于 u 的初始条件：

$$u|_{t=0}=\Phi(x); \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\mu\Phi(x)+\Psi(x)。 \tag{58}$$

应用关于 u 的公式(47)，并注意(55)，結果得到：

$$\begin{aligned} v(x, t)=\frac{1}{2}e^{-\mu t}\Big\{&\Phi(x-at)+\Phi(x+at)+\\ &+\frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at}[\mu\Phi(\alpha)+\Psi(\alpha)]I\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}\right)d\alpha+\\ &+\frac{ct}{2}\int_{x-at}^{x+at}\frac{1}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}}I'\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}\right)\Phi(\alpha)d\alpha\Big\}, \end{aligned} \tag{59}$$

其中的 μ 与 c 上面已經說过，而 $a=\frac{1}{\sqrt{LC}}$。

这里，像在弦振动的情形一样，我們有扰动傳播的确定的速度 a，所以若給定的初始扰动的函数 $\Phi(x)$ 与 $\Psi(x)$ 只在某一个有限区間 $p\leqslant x\leqslant q$ 上不等于零，而我們应用公式(59)于点 x，其中 $x>q$，則直到时刻 $t=\frac{1}{a}(x-q)$，$v(x, t)$ 等于零。与弦比較起来所不同的是下述事实：初始扰动的后陣面通过之后，$v(x, t)$ 不等于零，也不是常数，而是 x 与 t 的函数。实际上，若 $t>\frac{1}{a}(x-p)$，

則公式(59)中不含积分的項等于零，而积分仍然保留，并且积分区間是定区間(p, q)。可是变量x与t还是作为参变量在积分号下出現。

例如，若当$t=0$时綫路中沒有电流，而电动势v由函数$\Phi(x)$确定，則根据方程(2)，我們有

$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=-\frac{A}{C}\Phi(x)。\tag{60}$$

如果算作$A=0$，就是忽略电漏不計，則右边是零。

187. 关于有界綫路的富里埃法 在有界綫路的情形，給定了初始条件以及边值条件时，不难应用富里埃法求方程(51)的积分。設在綫路的一端$x=0$受有給定的常电动势E的作用，而在另一端有$v=0$，就是說，有边值条件：

$$v|_{x=0}=E \quad v|_{x=l}=0。\tag{61}$$

此外，我們設在初始时刻$t=0$时，綫路中沒有电动势也沒有电流，就是說，当$0<x<l$时

$$v|_{t=0}=0, \quad i|_{t=0}=0。\tag{62}$$

这时，方程(1)与(2)指出

$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \quad \left.\frac{\partial i}{\partial t}\right|_{t=0}=0。\tag{63}$$

如此，我們需要在边值条件(61)以及初始条件

$$v|_{t=0}=0; \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \quad (0<x<l)\tag{64}$$

之下求方程(51)的积分

先作出方程(51)的只依賴于x的一个解$v=F(x)$，使它满足边值条件(61)。对于$F(x)$我們得到方程

$$F''(x)-b^2F(x)=0 \quad (b^2=RA)。$$

在[**182**]的例中，我們恰好求过这个方程的满足条件(61)的解，那就是

$$F(x)=E\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl}。\tag{65}$$

現在我們依照公式

$$w(x,\ t)=v(x,\ t)-F(x)\tag{66}$$

引用新的未知函数$w(x,\ t)$以替代 $v(x,\ t)$。

对于 $w(x,\ t)$我們有同样的方程(51),齐次的边值条件

$$w|_{x=0}=0;\quad w|_{x=l}=0\tag{67}$$

以及初始条件

$$w|_{t=0}=-F(x);\quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=0。\tag{68}$$

为簡短起見,我們把关于 w 的方程(51)写成下面的形状:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2h\frac{\partial w}{\partial t}-b^2 w=0,\tag{69}$$

其中

$$a^2=LC;\quad 2h=LA+RC,\quad b^2=RA。\tag{70}$$

以下我們应用通常的富里埃法。求方程(69)的解,使具有两个函数的乘积的形状,一个只是 x 的函数,一个只是 t 的函数:

$$w=XT。$$

代入到方程(69)中,分离变量,就得到:

$$\frac{X''}{X}=\frac{a^2T''+2hT'+b^2T}{T}=-\frac{m^2\pi^2}{l^2},$$

其中 m^2 暂时是任意常数。于是我們有两个常系数綫性方程:

$$X''+\frac{m^2\pi^2}{l^2}X=0,$$

$$a^2T''+2hT'+\left(b^2+\frac{m^2\pi^2}{l^2}\right)T=0。$$

注意边值条件(67),取第一个方程的解

$$X_m=\sin\frac{m\pi x}{l}\quad (m=1,\ 2,\ \cdots),$$

我們算作 m 是正整数。关于 T 的方程具有一般解为

$$T_m = A_m e^{\alpha_m t} + A'_m e^{\alpha'_m t},$$

其中 A_m 与 A'_m 是任意常数，α_m 与 α'_m 是方程

$$a^2l^2\alpha^2 + 2hl^2\alpha + (b^2l^2 + m^2\pi^2) = 0 \tag{71}$$

的根，这里我們算作綫路中的常数 R, L, C, A 是这样的，使得当 m 是任何整数时，方程(71)具有不同的根。如此，我們得到满足边值条件的无穷多个解：

$$w_m = (A_m e^{\alpha_m t} + A'_m e^{\alpha'_m t}) \sin \frac{m\pi x}{l}。 \tag{72}$$

取这些解的和：

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m e^{\alpha_m t} + A'_m e^{\alpha'_m t}) \sin \frac{m\pi x}{l}, \tag{73}$$

并选擇常数 A_m 与 A'_m，使得满足初始条件(68)。这就給出

$$\left.\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} (A_m + A'_m) \sin \frac{m\pi x}{l} &= -F(x), \\ \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m A_m + \alpha'_m A'_m) \sin \frac{m\pi x}{l} &= 0。 \end{aligned}\right\} (0 < x < l)$$

用普通的方法确定富里埃系数，我們就得到关于 A_m 与 A'_m 的两个方程：

$$\left.\begin{aligned} A_m + A'_m &= -\frac{2}{l}\int_0^l F(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx, \\ \alpha_m A_m + \alpha'_m A'_m &= 0。 \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

把函数(65)代入到积分号下，我們可以作出积分，就得到：

$$\frac{2}{l}\int_0^l F(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{2m\pi}{b^2l^2 + m^2\pi^2} E。$$

解方程組(74)，就有

$$A_m = \frac{2m\pi}{b^2l^2 + m^2\pi^2} \cdot E \frac{\alpha'_m}{\alpha_m - \alpha'_m};$$

$$A'_m = -\frac{2m\pi}{b^2l^2 + m^2\pi^2} \cdot E \frac{\alpha_m}{\alpha_m - \alpha'_m}。$$

代入到公式(73)中,我們得到:

$$w=E\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m\pi}{b^2l^2+m^2\pi^2}\cdot\frac{\alpha'_m e^{\alpha_m t}-\alpha_m e^{\alpha'_m t}}{\alpha_m-\alpha'_m}\sin\frac{m\pi x}{l}。\quad(75)$$

方程(71)的根或者是負实数,或者是具有負实部的共軛复数。在任何情形下,当 t 增加时,解(75)有阻尼。它确定出由空綫路到函数(65)所确定的稳定状态的轉变过程。結果公式(66)給出电动势的表达式:

$$v=E\frac{\operatorname{sh}b(l-x)}{\operatorname{sh}bl}+$$

$$+E\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m\pi}{b^2l^2+m^2\pi^2}\cdot\frac{\alpha'_m e^{\alpha_m t}-\alpha_m e^{\alpha'_m t}}{\alpha_m-\alpha'_m}\sin\frac{m\pi x}{l}。\quad(76)$$

解二次方程(71),对于它的根我們得到下面形状的表达式:

$$\alpha_m=-\nu+k_m;\quad \alpha'_m=-\nu-k_m,\quad(77)$$

其中

$$\nu=\frac{h}{a^2};\qquad k_m=\frac{1}{a^2l}\sqrt{h^2l^2-a^2(b^2l^2+m^2\pi^2)}。\quad(78)$$

代入到(76)中,可以把这个公式写成下面的形状:

$$v=E\frac{\operatorname{sh}b(l-x)}{\operatorname{sh}bl}-$$

$$-Ee^{-\nu t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m\pi}{b^2l^2+m^2\pi^2}\left(\operatorname{ch}k_mt+\frac{\nu}{k_m}\operatorname{sh}k_mt\right)\sin\frac{m\pi x}{l}。\quad(79)$$

現在我們按照前一段中所講的方法来确定 i。方程(2)給出

$$\frac{\partial i}{\partial x}=-AE\frac{\operatorname{sh}b(l-x)}{\operatorname{sh}bl}+$$

$$+AEe^{-\nu t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m\pi}{b^2l^2+m^2\pi^2}\left(\operatorname{ch}k_mt+\frac{\nu}{k_m}\operatorname{sh}k_mt\right)\sin\frac{m\pi x}{l}+$$

$$+CEe^{-\nu t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m\pi}{b^2l^2+m^2\pi^2}\left(k_m-\frac{\nu^2}{k_m}\right)\operatorname{sh}k_mt\sin\frac{m\pi x}{l},$$

或者,根据(78),代入以

$$\nu^2 - k_m^2 = \frac{b^2 l^2 + m^2 \pi^2}{a^2 l^2},$$

对 x 求积分，并注意 $a^2 = LC$，就得到

$$i = \frac{AE}{b} \cdot \frac{\operatorname{ch} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} -$$

$$-2AEle^{-\nu t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{b^2 l^2 + m^2 \pi^2} \left(\operatorname{ch} k_m t + \frac{\nu}{k_m} \operatorname{sh} k_m t \right) \cos \frac{m\pi x}{l} +$$

$$+ \frac{2E}{Ll} e^{-\nu t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k_m} \operatorname{sh} k_m t \cos \frac{m\pi x}{l} + B(t)。 \tag{80}$$

代入到方程（1）中，就得到确定 $B(t)$ 的方程：

$$LB'(t) + RB(t) = 0,$$

由此

$$B(t) = B_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \tag{81}$$

其中 B_0 是任意常数，它需要由下述条件确定：当 $t=0$ 时沿着整个綫路 i 等于零。把表达式(81)代入到公式(80)中，然后讓 $t=0$ 和 $i=0$，就得到：

$$0 = \frac{AE}{b} \frac{\operatorname{ch} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} -$$

$$-2AEl \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{b^2 l^2 + m^2 \pi^2} \cos \frac{m\pi x}{l} + B_0。 \tag{82}$$

把右边第一項在区間 $0<x<l$ 上展开为只依余弦的富里埃級数，我們得到：

$$\frac{AE}{b} \frac{\operatorname{ch} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} =$$

$$= \frac{AE}{lb^2} + 2AEl \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{b^2 l^2 + m^2 \pi^2} \cos \frac{m\pi x}{l} \quad (0<x<l),$$

于是条件(82)給出

$$B_0 = -\frac{AE}{lb^2} = -\frac{E}{Rl},$$

所以
$$B(t)=-\frac{E}{Rl}\,e^{-\frac{R}{L}t}。$$

把这个表达式 $B(t)$ 代入到公式(80)中，結果就得到电流强度的表达式。

在 A. H. 克雷罗夫的論文"关于沿着电纜的电流"(实用物理杂志，卷 VI，第 2 期，第 66 頁，1929 年)中可以找到这里所講的解法的类似的討論。

188. 推广的波动方程 在[**185**]中我們考虑过波动方程推广到綫性的情形，那里是具有两个自变量的情形。利用同样的方法，可以考虑推广到具有三个或四个自变量的波动方程。为要簡化以下的公式，我們算作在波动方程中速度 $a=1$。要想由下面所得到的公式轉换为 a 是任何数的公式，只須在其中用 at 来替换 t 。

我們对于无界平面来考虑方程
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c^2u, \tag{83}$$
具有初始条件
$$u\Big|_{t=0}=0;\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\omega(x,y)。 \tag{84}$$

替代这个問題我們考虑一个新的問題，就是求波动方程
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$
具有初始条件
$$w\Big|_{t=0}=0;\quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=\omega(x,y)e^{cz}$$
时的积分。

用卜阿桑公式直接可以解决这个新問題：
$$w=\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\omega(x+t\sin\theta\cos\varphi,\ y+t\sin\theta\sin\varphi)e^{c(z+t\cos\theta)}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi。$$

我們可以把这个公式写成下面的形状：

$$w(x, y, z, t)=e^{cz}u(x, y, t),$$

其中

$$u(x, y, t)=\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\omega(x+t\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y+t\sin\theta\sin\varphi)e^{ct\cos\theta}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi, \qquad (85)$$

像在[**185**]中完全一样，可以証明，这个函数也满足方程(83)以及初始条件(84)。現在我們把公式(85)变换为比較簡單的形状。依照公式 $t\cos\theta=\rho$ 引用新的积分变量 ρ 以替代 θ，由此

$$t\sin\theta\, d\theta=-d\rho, \quad \sin\theta=\sqrt{1-\frac{\rho^2}{t^2}}。$$

公式(85)中对 θ 求的积分在新变量下就有下面的形状：

$$\frac{1}{t}\int_{-t}^{+t}\omega(x+\sqrt{t^2-\rho^2}\cos\varphi,\ y+\sqrt{t^2-\rho^2}\sin\varphi)e^{c\rho}d\rho,$$

或者把积分区間分为两个：$(-t, 0)$与$(0, t)$，在第一个区間中用$(-\rho)$替换 ρ，我們就可以把上面这个积分写成下面的形状：

$$\frac{2}{t}\int_0^t\omega(x+\sqrt{t^2-\rho^2}\cos\varphi,\ y+\sqrt{t^2-\rho^2}\sin\varphi)\operatorname{ch}c\rho\, d\rho,$$

如此，公式(85)就改写成下面的形状：

$$u(x, y, t)=\int_0^t\Big[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega\ (x+\sqrt{t^2-\rho^2}\cos\varphi,$$
$$y+\sqrt{t^2-\rho^2}\sin\varphi)d\varphi\ \Big]\operatorname{ch}c\rho\, d\rho。$$

这个公式中对 φ 求的积分，就給出函数 $\omega(x, y)$沿着平面 XY 上以(x, y) 为心$\sqrt{t^2-\rho^2}$为半徑的圓周的值的算术平均值。我們用 $T_{\sqrt{t^2-\rho^2}}\{\omega(x, y)\}$来記这个算术平均值，結果公式(85)就可以写成下面的形状：

$$u(x, y, t)=\int_0^t T_{\sqrt{t^2-\rho^2}}\{\omega(x, y)\}\operatorname{ch}c\rho\, d\rho。\qquad (86)$$

注意，若 c 是虛数 $c=c_1i$，則 $\operatorname{ch}c\rho=\cos c_1\rho$。把所得到的解对 t 求导数，就得到方程(83)的解$u_1=\frac{\partial u}{\partial t}$，它滿足初始条件：

$$u_1\Big|_{t=0}=\omega(x,y);\quad \frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0}=0。$$

完全一样的，求方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+c^2u \tag{87}$$

具有初始条件

$$u\Big|_{t=0}=0;\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\omega(x,y,z) \tag{88}$$

的积分时，需要利用 § 17 [**173**] 中公式(82_2) 当 $n=4$ 的情形，用 $\omega(x_2,x_3,x_4)e^{cx_1}$ 来替换其中的 ω。作一些簡單的变换，就可以得到方程(87)的具有初始条件(88)的下面形状的解：

$$u=\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\rho^2 I_0(ic\sqrt{t^2-\rho^2})T_\rho\{\omega(x,y,z)\}d\rho,$$

其中 $T_\rho\{\omega(x,y,z)\}$ 是函数 $\omega(x,y,z)$ 沿着以 (x,y,z) 为心、ρ 为半徑的球面的平均值。

§ 19. 樞軸的振动

189 基本方程 很多的导至綫性偏微分方程的数学物理問題可以应用富里埃法。这时我們遇到已知函数的依照应用富里埃法时所得的函数的不同的展开式。在以上考虑过的一串問題中我們有过这样的展开式的例。

作为一个例，我們再考虑樞軸的横振动，現在我們来导出关于这个問題的方程。

我們所謂細長樞軸与弦不同的是，在弯曲时須要作功。这里，未知函数是具有横坐标 x 的樞軸的軸在时刻 t 的形变的縱坐标 $y(x,t)$。

若 M 是弯曲矩，而 $F(x,t)$ 是对于單位長来講的負載，則由工程上的弯曲理論知道 [**16**]

$$EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=M;\qquad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}=F,\tag{1}$$

由此,把第一个方程对 x 求导数两次,就得到:

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=F(x,t)。\tag{2}$$

如果力 F 不依賴于时間而樞軸保持靜止狀态的話,方程(2)就表达樞軸的平衡条件;为要得到运动方程,应当依照达朗倍尔原理計入外力以及按單位長來計算的断面 x 的慣性力。在断面的所有的点这个断面的加速度可以取作常数,就等于 $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$,显然,如果由加速度乘以 ρS,就得到按單位長計算的慣性力,其中 ρ 是樞軸的体密度,S 是横断面面积。于是,在方程(2)中应当用 $F-\rho S\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ 來替換 F,这就給出四阶方程:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+b^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=f(x,t),\tag{3}$$

其中

$$b^2=\frac{EI}{\rho S},\qquad f(x,t)=\frac{1}{\rho S}F(x,t)。\tag{4}$$

樞軸的端点 $x=0$ 与 $x=l$ 应当滿足的边值条件是很重要的,它的形狀依賴于对应端点的固定方法。如果端点被紧紧地固定住,于是在端点樞軸有水平的方向,则得到两个条件:

$$当\ x=0\ 或\ x=l\ 时,\ y=0,\ \frac{\partial y}{\partial x}=0。\tag{5}$$

如果端点只是被支住,就是說,可以繞着固定住的点自由轉动,则在这位置弯曲矩应当等于零,就是說,我們有下列条件:

$$当\ x=0\ 或\ x=l\ 时,\ y=0,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0。\tag{6}$$

最后,如果端点是自由的,则在端点,不仅是弯曲矩,連 $\frac{\partial M}{\partial x}$ 都应当等于零,不过 y 自然可以不等于零。于是在这情形下

$$\text{当 } x=0 \text{ 或 } x=l \text{ 时,}\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=0。\tag{7}$$

在所有以上考虑的情形下，我們得到在每一个端点有两个条件，这与弦的情形不同，那时在每一个端点我們有一个条件。

最后，还应当注意到与弦的情形型态相同的初始条件：

$$y\bigg|_{t=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial y}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\varphi_1(x)。\tag{8}$$

对于自由振动，我們在方程(3)中設 $f(x, t)=0$，就給出：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+b^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=0。\tag{9}$$

190. 特解　像在弦的情形一样，我們求这个方程的形状为：

$$y=T(t)X(x)\tag{10}$$

的特解。

代入到(9)中，求得：

$$T''(t)X(x)+b^2T(t)X^{(4)}(x)=0,$$

或者，像在弦的情形一样：

$$\frac{T''(t)}{b^2T(t)}=-\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)}=-k^4,$$

其中 k^4 是常数，并且我們算作 k 是实数。这就給出：

$$T''(t)+b^2k^4T(t)=0,\tag{11}$$

$$X^{(4)}(x)-k^4X(x)=0。\tag{12}$$

方程(11)的一般解是

$$T(t)=N\sin(bk^2t+\varphi),\tag{13}$$

就是說，解(10)仍然是駐波，这时樞軸上的点作頻率与相都相同的調和振动，所不同的只是依賴于 x 的振幅 $NX(x)$。

不难求出方程(12)的一般解。它的特征方程[30]

$$\alpha^4-k^4=0$$

当 $k\neq 0$ 时具有根 $k, -k, ik, -ik$，于是它的一般解是：

$$X(x)=C_1e^{kx}+C_2e^{-kx}+C_3\cos kx+C_4\sin kx,\tag{14}$$

或者，通过 $\operatorname{ch} kx$ 与 $\operatorname{sh} kx$ 来表达 e^{kx} 与 e^{-kx} 并改变任意常数 C_1 与 C_2 的值，就可以把一般解写成下面的形状：

$$X(x)=C_1\operatorname{ch} kx+C_2\operatorname{sh} kx+C_3\cos kx+C_4\sin kx。\qquad(15)$$

现在我們分别考虑边值条件的不同情形：

1. 若樞軸在两端固定住，当 $x=0$ 与 $x=l$ 时应当满足条件(6)，就是說

$$X(0)=C_1+C_3=0;\ X''(0)=k^2(C_1-C_3)=0,$$

$$X(l)=C_1\operatorname{ch} kl+C_2\operatorname{sh} kl+C_3\cos kl+C_4\sin kl=0;$$

$$X''(l)=k^2(C_1\operatorname{ch} kl+C_2\operatorname{sh} kl-C_3\cos kl-C_4\sin kl)=0,$$

显然，这就給出，当 $k\neq 0$ 时：

$$C_1=C_3=0;\qquad(16)$$

$$C_2\operatorname{sh} kl+C_4\sin kl=0;\ C_2\operatorname{sh} kl-C_4\sin kl=0。\qquad(16_1)$$

显然 $C_2=C_4=0$ 是这两个齐次方程的方程組的解；不过这时所有的常数 C 都等于零，而我們得到沒有意义的解 $X(x)=0$。除掉这个情形，我們应当算作常数 C_2 与 C_4 中至少有一个不等于零。

若 $C_4=0$，則由于当 $k\neq 0$ 时 $\operatorname{sh} kl\neq 0$[**I**, **177**]，由方程$(16_1)$推知 $C_2=0$。所以我們应当算作 $C_4\neq 0$。由(16_1)中两个方程逐項相减，我們就得到 $C_4\sin kl=0$，于是結果得到关于 k 的方程

$$\sin kl=0。$$

如果满足这个条件，則方程(16_1)化为 $C_2\operatorname{sh} kl=0$，于是給出 $C_2=0$，就是說，設 $C_4=C$，根据(14)就得到：

$$X(x)=C\sin kx。\qquad(17)$$

方程(17)給出 k 的像在弦的情形相同的解：

$$\frac{\pi}{l},\ \frac{2\pi}{l},\ \cdots,\ \frac{n\pi}{l},\ \cdots,$$

以下的討論及公式就都与[**167**]中的相同，所改变的只是第 n 調和

素的频率 ω_n 不是由[168]中公式(44)来表达，而是如下的形状：

$$\omega_n=\frac{bn^2\pi^2}{l^2}。\tag{18}$$

当 $k=0$ 时，方程(12)具有一般解：$X(x)=C_1+C_2x+C_3x^2+$ $+C_4x^3$，使它满足条件(6)，就会發現所有的常数 C 应当都等于零。

2．若樞軸在两端支住，则当 $x=0$ 与 $x=l$ 时应当满足条件(5)，这就給出

$$X(0)=C_1+C_3=0;\quad X'(0)=k(C_2+C_4)=0,$$
$$X(l)=C_1\operatorname{ch}kl+C_2\operatorname{sh}kl+C_3\cos kl+C_4\sin kl=0;$$
$$X'(l)=k(C_1\operatorname{sh}kl+C_2\operatorname{ch}kl-C_3\sin kl+C_4\cos kl)=0,$$

由此看出

$$C_3=-C_1;\quad C_4=-C_2,\tag{19}$$

于是我們得到用以确定 C_1 与 C_2 的两个齐次方程的方程組：

$$\left.\begin{aligned}C_1(\operatorname{ch}kl-\cos kl)+C_2(\operatorname{sh}kl-\sin kl)=0,\\ C_1(\operatorname{sh}kl+\sin kl)+C_2(\operatorname{ch}kl-\cos kl)=0。\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

为要这两个方程具有不同于 $C_1=C_2=0$ 的解，必須且只須 C_1 与 C_2 的系数成比例：

$$\frac{\operatorname{ch}kl-\cos kl}{\operatorname{sh}kl+\sin kl}=\frac{\operatorname{sh}kl-\sin kl}{\operatorname{ch}kl-\cos kl}。$$

这时，(20)中的两个方程化为一个。利用关系式

$$\cos^2x+\sin^2x=1,\quad \operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1,$$

可以把上面写的条件改写成下面的形状：

$$\operatorname{ch}kl\cdot\cos kl=1。\tag{21}$$

我們就得到了关于 k 的方程，这与前一种情形中的方程(17)类似。为簡短起見，設

$$kl=\lambda,$$

我們就得到用以确定 λ 的超越方程：

$$\operatorname{ch}\lambda\cos\lambda=1_{\circ} \tag{22}$$

把方程(22)改写成

$$\cos\lambda=\frac{1}{\operatorname{ch}\lambda}$$

画出曲綫 $\cos\lambda$ 与 $\frac{1}{\operatorname{ch}\lambda}$ 的圖形(圖 140)，我們就發現方程(22)有无穷多的实根

$$0,\ \pm\lambda_1,\ \pm\lambda_2,\ \cdots,\ \pm\lambda_n,\ \cdots,$$

并且 当 $n\to\infty$ 时，$\lambda_n-\frac{2n+1}{2}\pi\to 0_{\circ}$

我們現在只注意正根：

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n,\ \cdots_{\circ} \tag{23}$$

它們对应于参变量 k 的无穷多个值：

$$k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n,\cdots;\quad k_n=\frac{\lambda_n}{l},\ \cdots_{\circ} \tag{24}$$

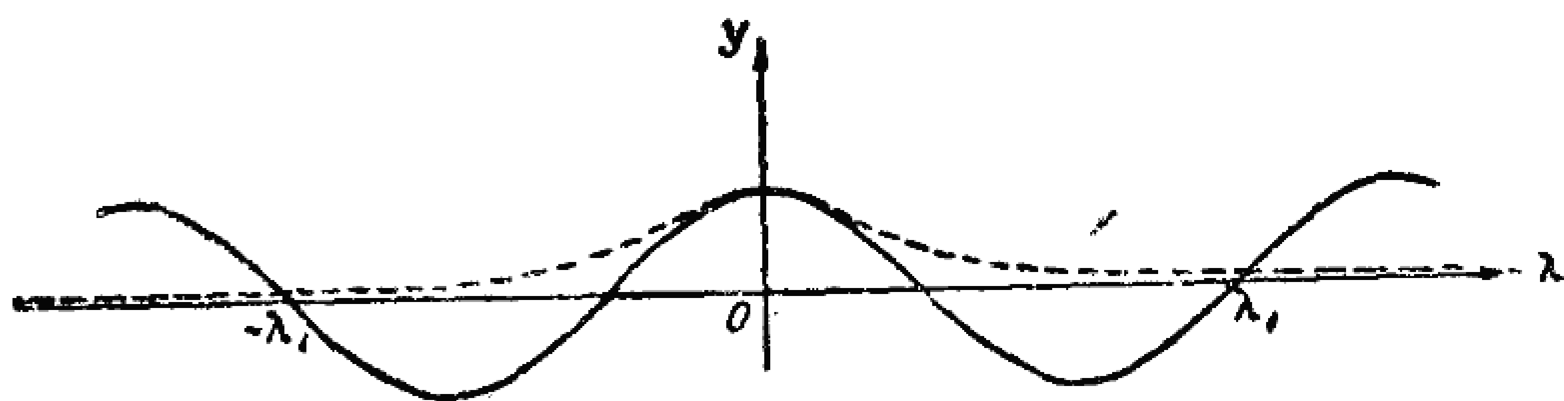


圖 140.

k 取这些値时，滿足条件(21)，于是由方程(20)中的一个可以推出另一个，这就可以写成：

$$C_1=C(\operatorname{sh}kl-\sin kl);\quad C_2=-C(\operatorname{ch}kl-\cos kl)_{\circ}$$

由公式(19)确定出 C_3 与 C_4，代入到(15)中，我們設 $C=1$，显然这并不失去普遍性，于是得到未知解 $X(x)$ 的形状：

$$X(x)=(\operatorname{sh}kl-\sin kl)(\operatorname{ch}kx-\cos kx)-$$
$$-(\operatorname{ch}kl-\cos kl)(\operatorname{sh}kx-\sin kx)_{\circ} \tag{25}$$

严格說来，我們得到无穷多个解

$$X_1(x),\ X_2(x),\ \cdots,\ X_n(x),\ \cdots \tag{26}$$

它們是由一般公式(25)用 k_n 替换 k 得来的。

我們可以完全不考慮負根 $-\lambda_1,\ -\lambda_2,\ \cdots$，因为参变量 k 对应于它們的值 $-k_1,\ -k_2,\ \cdots$ 給出同样的一列函数(26)，这是由于对 k 来講函数(25)是奇函数。

在公式(13)中用(24)中的值代入作 k，就求出对应的一列函数 $T(t)$：

$$\left.\begin{array}{c} T_1(t),\ T_2(t),\ \cdots,\ T_n(t),\ \cdots; \\ T_n(t)=N_n\sin(\omega_n t+\varphi_n);\quad \omega_n=bk_n^2, \end{array}\right\} \tag{27}$$

于是最后得到方程(9)的一串解：

$$\left.\begin{array}{c} y_1(x,\ t),\ y_2(x,\ t),\ \cdots,\ y_n(x,\ t),\ \cdots; \\ y_n(x,\ t)=T_n(t)X_n(x)。 \end{array}\right\} \tag{28}$$

对于樞軸的端点来講，具有上述的其他条件时，我們会得到类似的結果：把函数 $X(x)$ 表达成(15)的形狀并代入边值条件，就得到具有四个未知数 $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ 的四个齐次方程的方程組，当且仅当参变量 k 满足某一具有无穷多个实根的超越方程时，$C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ 有所要求的异于零的解。把这个方程的根 k 代入到方程組的系数中，就得到一个方程組，在这組中有一个方程可以由其余的方程推出来，于是就确定出常数 $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$，只能差一个任意的公因子，于是我們就得到函数 $X_n(x)$，它是普通的正弦与余弦以及双曲綫正弦与余弦的綫性結合。

191. 任意函数的展开式 我們現在不詳細的分別討論所有的特殊情形，而轉向所要满足的另外的初始条件：

$$y\Big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x)。 \tag{29}$$

为此，像在弦的情形一样，把 $y(x,\ t)$ 写成特殊解(28)的和的

形状：

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)。 \tag{30}$$

讓 $a_n = N_n \sin \varphi_n, \quad b_n = N_n \cos \varphi_n,$

把(30)改写成：

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) X_n(x), \tag{30$_1$}$$

于是条件(29)給出：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) = \varphi(x); \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n X_n(x) = \varphi_1(x)。 \tag{31}$$

如此，我們看出，关于确定常数 a_n 与 b_n 的整个問題就化为把已知函数 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 依函数 $X_n(x)$ 展开为級数的問題。这些級数类似于我們以前研究过的富里埃級数。

我們現在不講关于这样的展开式的收斂性以及可能性的問題，只是像在[**142**]中对于富里埃級数所作的一样，假設这样展开是可能的，我們来說明如何确定展开式的系数。这里我們假定問題的边值条件不一定是在1与2两条中[**190**]所講的，而可以随意是以前列举的(5)，(6)，(7)的情形。

因此，設我們需要把在区間$(0, l)$上的已知函数$f(x)$展开为下面形状的級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)。 \tag{32}$$

我們假設这样展开是可能的，并且級数(32)可以逐項求积分。系数 A_n 之所以可能被确定是由于函数

$$X_1(x), X_2(x), \cdots, X_n(x), \cdots$$

在区間$(0, l)$上的正交性，現在我們証明

$$若\ n \neq m, \int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = 0。 \tag{33}$$

为了这个目的，我們指出，如果将 k 换到 k_n 时以上所作出的函数 $X_n(x)$ 满足方程(12)，就是說

$$X_n^{(4)}(x)=k_n^4X_n(x)。$$

如此，我們就有：

$$X_n^{(4)}(x)=k_n^4X_n(x);\quad X_m^{(4)}(x)=k_m^4X_m(x)。\tag{34}$$

(34)中第一个方程乘以 $X_m(x)$，第二个方程乘以 $X_n(x)$，逐項相减，再由 0 到 l 对 x 求积分，就有

$$(k_m^4-k_n^4)\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx=$$

$$=\int_0^l [X_m^{(4)}(x)X_n(x)-X_n^{(4)}(x)X_m(x)]dx,\tag{35}$$

于是为要証明公式(33)我們只須証明

$$\int_0^l [X_m^{(4)}(x)X_n(x)-X_n^{(4)}(x)X_m(x)]dx=0,\tag{36}$$

因为当 $m\neq n$ 时因子 $(k_m^4-k_n^4)$ 不等于零。

用分部积分法，求得：

$$\int X_m^{(4)}(x)X_n(x)dx=X_m'''(x)X_n(x)-\int X_m'''(x)X_n'(x)dx=$$

$$=X_m'''(x)X_n(x)-X_m''(x)X_n'(x)+\int X_m''(x)X_n''(x)dx,$$

同理

$$\int X_n^{(4)}(x)X_m(x)dx=$$

$$=X_n'''(x)X_m(x)-X_n''(x)X_m'(x)+\int X_n''(x)X_m''(x)dx,$$

由此不难求出：

$$\int_0^l [(X_m^{(4)}(x)X_n(x)-X_n^{(4)}(x)X_m(x)]dx=$$

$$=[X_m'''(x)X_n(x)-X_n'''(x)X_m(x)]\Big|_{x=0}^{x=l}-$$

$$-[X_m''(x)X_n'(x)-X_n''(x)X_m'(x)]\Big|_{x=0}^{x=l}。$$

这等式右边含有函数 $X_m(x)$，$X_n(x)$ 以及它們的直到三阶导数当 $x=0$ 与 $x=l$ 时的值，无論我們取条件(5)，(6)，(7)中那一个，右边每一項总有一个等于零的因子。于是証明了等式(36)，也就是証明了正交性(33)。

当 $m=n$ 时积分(33)成为

$$I_n=\int_0^l X_n^2(x)\,dx \tag{37}$$

从而是完全确定的常数，在每一种特殊情形下它都不难計算出来，例如在情形1[**190**]我們有

$$I_n=\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{l}{2}。$$

如此，若我們把函数組 $X_1(x)$，$X_2(x)$，…，$X_n(x)$，…換成函数組

$$\frac{X_1(x)}{\sqrt{I_1}},\quad \frac{X_2(x)}{\sqrt{I_2}},\ \cdots,\ \frac{X_n(x)}{\sqrt{I_n}},\cdots,$$

則不仅得到正交組，而且是标准組 [**148**]，就是說每个函数的平方的积分等于1。現在回轉来确定展开式(32)的系数 A_n。两边乘以 $X_m(x)$，由0到 l 对 x 求积分并注意关系式(33)与(37)，就直接求得

$$\int_0^l f(x)X_m(x)\,dx=A_mI_m,$$

由此
$$A_m=\frac{\int_0^l f(x)X_m(x)\,dx}{I_m}=\frac{\int_0^l f(x)X_m(x)\,dx}{\int_0^l X_m^2(x)\,dx}。$$

如此，我們引出任意函数的类似于富里埃級数的級数展开式：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nX_n(x),\ 其中\ A_n=\frac{\int_0^l f(x)X_n(x)\,dx}{\int_0^l X_n^2(x)\,dx}。 \tag{38}$$

如此，就不难确定等式(31)中常数 a_n 与 b_n 了，这只要用 $\varphi(x)$

与 $\varphi_1(x)$ 来替换(38)中的 $f(x)$：

$$a_n=\frac{\int_0^l \varphi(x)X_n(x)dx}{\int_0^l X_n^2(x)dx},\quad b_n=\frac{\int_0^l \varphi_1(x)X_n(x)dx}{\omega_n\int_0^l X_n^2(x)dx}。\tag{39}$$

把所有这些代入到級数(30)中，就得到这問題的最后的解。

对于樞軸的强迫振动的論述像弦的情形完全一样，所不同的只是函数 $f(x,t)$ 不是有依正弦的展开式，而是依函数 $X_n(x)$ 的展开式。

由以上显見，駐波法应用于弦的振动以及樞軸的振动时同样有效。特征綫法当討論弦的振动方程以及电报方程时很有效，但是这个方法应用于方程(9)是不成功的。

§20. 拉普拉斯方程

192. 調和函数　在这一节中我們考虑下面形状的偏微分方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0,\tag{1}$$

其中 U 是 x, y 与 z 的函数。我們已經提到过方程(1)叫做拉普拉斯方程。以前我們講过，方程(1)的左边可以記作 ΔU，这叫做拉普拉斯算子作用在函数 U 上。在[**87**]中我們看到，引力或电荷的作用力的勢量，在产生这个場的引体或电荷之外的空間内所有的点，应当滿足方程(1)。

在[**114**]中也遇到过形状如(1)的方程。不可压縮流体的无漩渦流动的速度的勢量应当滿足这个方程。在[**117**]中我們証明过，当热变化稳定时，就是温度 U 只依賴于位置而不依賴于时間时，均匀物体的温度应当滿足方程(1)。同样，在[**118**]中，当考虑

稳定电場时我們也曾得到拉普拉斯方程。

若函数 U 不依賴于某一个坐标，例如，不依賴于 z，則方程(1)化为下面的形状：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0。\qquad (2)$$

在这情形下，在任何一条平行于 Z 軸的直綫上，U 保持有相同的值，或者換句話說就是，在平行于 XY 平面的任何平面上 U 的值的分布是同样的，于是只要考虑 XY 平面就成了。

在某一塊容积(三維区域)(D)上的直到二阶导数都是連續的連續函数，如果滿足方程(1)，就叫做在(D)上的調和函数。关于方程(2)，对于平面 XY 上的区域来講，也采取这个名辞。以下我們講一些調和函数的性質。

在数学物理問題中，通常除去方程(1)外，函数 U 还应当服从于下述的一些边值条件。在这情形下，自然不用初始条件。关于方程(1)的基本边值問題是下面这个問題：确定一个在区域(D)上的調和函数，使得在这区域的界面(S)上它取已知的值。这个問題通常叫做狄义赫利問題。在問題的叙述中，所謂在曲面(S)上的 U 的值，意思是指，当由区域(D)的內部逼近于曲面(S)上的点时，U 所得到的極限値。这个問題的更正确的叙述是：求一个函数 U，在(D)內是調和的，在(D)上包含界面(S)在內是連續的，并且在(S)上 U 取已知的值。这个在(S)上的已知函数自然应当是連續的。为簡單起見，我們算作(D)的界面是一个封閉曲面(S)。注意，区域(D)可以是有限的，也可以是无穷的。在后一个情形下它位于(S)之外。在有限区域的情形我們有狄义赫利內部問題，在无穷的情形——狄义赫利外部問題。在后一个問題中还要加一个条件，就是当点无限远移时函数趋向零，或者可以說在无穷远点函数应当成为零。在狄义赫利問題中边值条件写成下面的形状：

$$U|_{(S)}=f(M),\tag{3}$$

其中$f(M)$是在曲面(S)上的已知連續函数，而M記这曲面上的变点。狄义赫利内部問題的类似的叙述适用于关于平面区域的方程(2)，这时边値条件是在这区域的界綫上的U的値。在平面上狄义赫利外部問題中，需要当点无限远移时函数有有限的極限。

我們再講边値条件的一种型态，就是当在曲面S上給定了法綫导数的値的情形：

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{(S)}=f(M)。\tag{4}$$

求滿足这样的边値条件的調和函数的問題叫做聶依曼問題。在流体力学中考虑剛体在不可压縮流体中的运动时会遇到它。边値条件(4)表达出，物体的表面(S)上的点M与逼近于点M的流体粒子的速度的法綫支量重合。聶依曼問題对于方程(2)可以同样表述。

我們在講調和函数的性質之前，先講下面几个以后要用的公式。

193. 格林公式 設(D)是某一个有界的物体，(S)是它的界面，U与V是两个函数，在区域(D)上直到它的界面(S)，这两个函数是連續的且有直到二阶的連續导数。我們来考虑积分：

$$I=\iiint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)dv=$$

$$=\iiint\limits_{(D)}\operatorname{grad}U\cdot\operatorname{grad}V\,dv。$$

注意显然的恒等式：

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)-U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

以及关于$\frac{\partial}{\partial y}$与$\frac{\partial}{\partial z}$的两个类似恒等式，这个积分可以写成下面

的形狀：

$$I=\iiint\limits_{(D)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right]dv-\iiint\limits_{(D)}U\Delta V dv_{\circ}$$

依照奥斯特洛格拉得斯基公式变換右边的第一項：

$$I=\iint\limits_{(S)}\left[U\frac{\partial V}{\partial x}\cos(n,X)+U\frac{\partial V}{\partial y}\cos(n,Y)+\right.$$

$$\left.+U\frac{\partial V}{\partial z}\cos(n,Z)\right]dS-\iiint\limits_{(D)}U\Delta V dv$$

或[**102**]：

$$I=\iint\limits_{(S)}U\frac{\partial V}{\partial n}dS-\iiint\limits_{(D)}U\Delta V dv,$$

其中(n)是在曲面(S)上的点的法綫方向，对物体(D)来講它是向外的。

如此，我們引出了所謂格林公式的原始型：

$$\iiint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)dv=$$

$$=\iiint\limits_{(D)}\operatorname{grad}U\cdot\operatorname{grad}V dv=\iint\limits_{(S)}U\frac{\partial V}{\partial n}dS-\iiint\limits_{(D)}U\Delta V dv_{\circ}\quad(5)$$

当函数U与V互換时，这等式的左边不改变，所以右边也有同样的性質，就是說我們可以写成：

$$\iint\limits_{(S)}U\frac{\partial V}{\partial n}dS-\iiint\limits_{(D)}U\Delta V dv=\iint\limits_{(S)}V\frac{\partial U}{\partial n}dS-\iiint\limits_{(D)}V\Delta U dv,$$

由此得到格林公式的最終形式：

$$\iiint\limits_{(D)}(U\Delta V-V\Delta U)dv=\iint\limits_{(S)}\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)dS_{\circ}\quad(6)$$

有时不利用向外的法綫，而利用向內的法綫，这时只要改变在公式

的右边的沿法綫的导数的符号，于是对于法綫向內的情形格林公式就有如：

$$\iiint\limits_{(D)}(U\Delta V-V\Delta U)dv=\iint\limits_{(S)}\left(V\frac{\partial U}{\partial n_i}-U\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)dS, \quad (6_1)$$

其中(n_i)是法綫向(D)內的方向。

区域(D)可能是以几个曲面为界的。在这情形下应用格林公式时，只是这公式右边的曲面积分需要沿作为区域(D)的界面的所有的曲面(S)来取。注意这时法綫(n)对容积(D)来講是向外的，于是在这块容积里边的界面上法綫的方向指向曲面的內部[**63**]。

在介紹格林公式(6)时，我們提到过，只須要求函数U与V以及它們的直到二阶导数直到(S)是連續的。自然对于曲面(S)也必須有一些要求。这可以归于引出奥斯特洛格拉得斯基公式所需要的条件[**63**]。这些条件可以叙述如下：曲面(S)可以分为有限多块，使得在每一块上直到它的界綫都有連續变化的切平面。这样的曲面通常叫做逐塊平滑的。以所說的曲面块的界綫为曲面的棱，应当是逐段光滑的曲綫。加在曲面上的这个条件也可以用解析形式来表出。

由格林公式可以推出一个在应用中很重要的公式，它給出在(D)內任何点M_0的函数值的表达式，这个表达式是某一曲面积分与某一容积积分之和。設$U(M)$是确定于区域(D)上的一个函数，这个函数以及它的直到二阶的导数在区域(D)上直到(S)是連續的。

应用格林公式于这个函数以及函数$V=\frac{1}{r}$，其中r是由位于(D)內的一个确定的点M_0到变点M的距离。若点M与M_0重合，则函数$V=\frac{1}{r}$成为无穷大，于是对于整个的物体(D)我們不可

以应用格林公式。由这物体中挖去一个小球，这个球以 M_0 为球心，小半徑为 ρ，用 (D_1) 記物体 (D) 所剩下的部分，用 (Σ_ρ) 記挖去的球的球面（圖 141）。在区域 (D_1) 上函数 U 与 V 具有所要求的連續性，于是对于这个区域应用格林公式就得到：

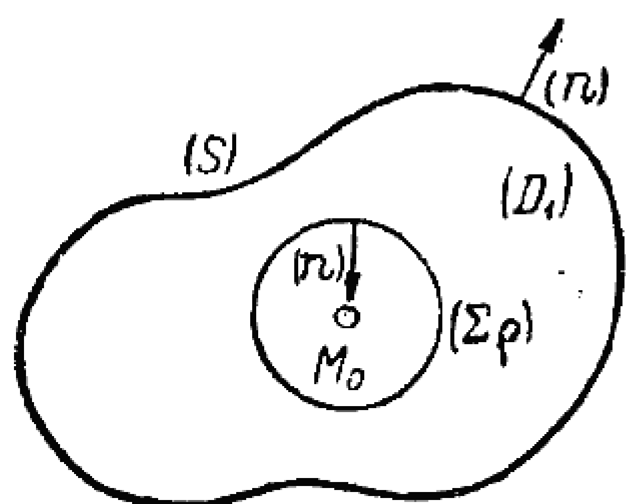


圖 141.

$$\iiint\limits_{(D_1)}\left[U\Delta\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\,\Delta U\right]dv=$$

$$=\iint\limits_{(S)}\left[U\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial n}\right]dS+\iint\limits_{(\Sigma_\rho)}\left[U\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial n}\right]dS,\qquad(7)$$

这里要沿作为物体 (D_1) 的界面的两个曲面 (S) 与 (Σ_ρ) 求积分。不过，我們講过，函数 $V=\frac{1}{r}$ 滿足拉普拉斯方程，就是 $\Delta\frac{1}{r}=0$ [**119**]。此外，在球面 (Σ_ρ) 上法綫 n 的方向指向球內，与半徑 r 的方向正相反，所以沿 (Σ_ρ) 的积分号下的沿法綫的导数就是对 r 的导数取相反的符号。注意以上所述，我們可以把公式（7）写成下面的形状：

$$\iiint\limits_{(D_1)}\frac{\Delta U}{r}\,dv+\iint\limits_{(S)}\left[U\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial n}\right]dS+$$

$$+\iint\limits_{(\Sigma_\rho)}\frac{1}{r^2}\,UdS-\iint\limits_{(\Sigma_\rho)}\frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial n}\,dS=0。\qquad(8)$$

現在我們讓挖去的球的半徑 ρ 趋向零。这时所写的公式中第一項就趋向沿整个容积 (D) 的积分 [**86**]。第二項与 ρ 无关。我們来証明第三項趋向極限 $4\pi U(M_0)$。注意，在 (Σ_ρ) 上 r 的大小具有常数值 ρ，于是可以写成：

$$\iint\limits_{(\Sigma_\rho)}\frac{1}{r^2}\,U(M)dS=\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{(\Sigma_\rho)}U(M)\,dS。$$

应用中值定理，就有：

$$\iint\limits_{(\Sigma_\rho)} \frac{1}{r^2} U(M)\,dS = \frac{1}{\rho^2} U(M_\rho)\cdot 4\pi\rho^2 = 4\pi U(M_\rho),$$

其中 M_ρ 是在球面 (Σ_ρ) 上的某一点。当 $\rho\to 0$ 时这个点趋向 M_0，由此看出，上面所写的表达式趋向 $4\pi U(M_0)$。同样应用中值定理于最后一項就得到：

$$-\iint\limits_{(\Sigma_\rho)} \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\,dS = -\frac{1}{\rho}\iint\limits_{(\Sigma_\rho)} \frac{\partial U}{\partial n}\,dS =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial n}\bigg|_{M_\rho} 4\pi\rho^2 = -\frac{\partial U}{\partial n}\bigg|_{M_\rho} 4\pi\rho\,。$$

函数 U 沿任何方向的一阶导数当 M_ρ 趋向 M_0 时保持有界，因为依照假定，在 (D) 内任何点函数 U 有直到二阶的連續导数。当 $\rho\to 0$ 时因子 $4\pi\rho$ 趋向零。由此看出，公式(8)中最后一項趋向零。由公式(8)取極限的結果就給出下面这个我們所要求的格林公式：

$$\iiint\limits_{(D)} \frac{\Delta U}{r}\,dv + \iint\limits_{(S)}\left[U\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right]dS + 4\pi U(M_0) = 0,$$

或

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right]dS - \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{(D)} \frac{\Delta U}{r}\,dv。\quad (9)$$

还要提出，对于任何的函数，只要它以及它的直到二阶的导数在区域 (D) 上直到 (S) 連續，这个公式总是正确的。

对于平面的情形完全类似的公式也成立。我們只把它引出来而不給証明。設 (B) 是平面上某一个区域，(l) 是这个区域的界綫，(n) 是这个界綫的法綫方向，对 (B) 来講是向外的。对于平面的情形在笛卡儿坐标系下拉普拉斯算子有下面的形状：

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}。$$

类似于公式(6)我們就有在平面上的公式：

$$\iint_{(B)}(U\Delta V-V\Delta U)dS=\int_{(l)}\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds。\qquad(10)$$

与公式(9)不能完全类似，因为引出公式(9)时用了函数 $\frac{1}{r}$ 满足拉普拉斯方程的性質。对于平面的情形，这不成立，于是替代函数 $\frac{1}{r}$ 需要取拉普拉斯方程的解 $\lg r$ 或 $\lg\frac{1}{r}=-\lg r$，其中 r 是平面上任何一个定点到变点 M 的距离。如此，替代公式(9)，在平面上我們就有下面这公式：

$$U(M_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{(l)}\left[U\frac{\partial(\lg r)}{\partial n}-\lg r\frac{\partial U}{\partial n}\right]ds+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\iint_{(B)}\Delta U\cdot\lg r dS,\qquad(11)$$

其中 M_0 是 (B) 内任何一个固定的点，r 是变点 M 到点 M_0 的距离。

注意，在公式(9)中的三重积分是反常积分，因为在点 M_0 被积函数成为无穷大。不过显然这个积分收斂，因为被积函数的絕对值小于 $\frac{A}{r^p}$，其中 $p=1$。在公式(11)中也是如此。

194. 調和函数的基本性質　考虑在具有界面 (S) 的有界区域 (D) 上的調和函数 U。假設 U 以及它的直到二阶的导数在区域 (D) 上直到 (S) 連續，应用格林公式(6)于这个函数 U 以及調和函数 $V\equiv1$，根据 $\Delta U=\Delta(1)=0$ 与 $\frac{\partial(1)}{\partial n}=0$，就得到

$$\iint_{(S)}\frac{\partial U}{\partial n}dS=0,\qquad(12)$$

就是說，我們有調和函数的第一个性質：调和函数的法綫导数沿区域的界面的积分等于零。

若应用公式（9）于調和函数 U，根据 $\Delta U=0$，就得到：

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right]dS。\qquad(13)$$

这就給出調和函数的第二个性質：調和函数在区域内任何点的値，可以由公式（13）通过这函数在区域的界面上的値以及法綫导数来表达。

注意，在公式（12）与（13）中的积分不含有函数 U 的二阶导数，因而应用这两个公式时只須假定这調和函数以及它的一阶导数在区域上直到 (S) 連續就行了。为要肯定这一点只須把曲面 (S) 稍微压縮，对于压縮的区域 (D') 写出公式（12）与（13），在 (D') 上直到它的界面，二阶导数也有連續性，然后把 (D') 扩張到 (D) 再求極限。压縮可以这样作，例如，在 (S) 上每一点的向内的法綫上截具有相同長度 δ 的一小段，这些綫段的端点就形成一个新的（压縮的）曲面。这里曲面 (S) 应当是这样的，对于所有的足够小的 δ，由所說的变換作出的曲面不会自交而且是逐塊平滑的[**193**]。这个問題将在第四卷里才詳細地講。

应用公式（13）于一种特殊区域，就是应用于以 M_0 为中心、R 为半徑的球，当然，假設函数 U 在这个球上是調和的，而且它及它的一阶导数直到球面 (Σ_R) 是連續的。

在这情形下，向外的法綫 n 的方向与球的半徑的方向相同，于是我們就有

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}=-\frac{1}{r^2},$$

由公式（13）得到：

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(\Sigma_R)}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}+\frac{1}{r^2}U\right)dS。$$

不过在球面 Σ_R 上 r 的大小保持常数值 R，所以

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{(\Sigma_R)}\frac{\partial U}{\partial n}dS+\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{(\Sigma_R)}UdS,$$

或者，根据(12)，結果就有

$$U(M_0)=\frac{\iint\limits_{(\Sigma_R)}UdS}{4\pi R^2}。\tag{14}$$

这个公式表达出調和函数的第三个性質：調和函数在球心的值等于这个函数在球面上的算术平均值，就是說，等于函数值沿球面的积分除以这球面的面积。

由这个性質差不多很明显的可以推出下面这个調和函数的第四个性質：

在区域内是調和的且直到区域的边界是連續的函数只是在这区域的边界上达到它的最大值以及最小值，不过这函数是常数的情形除外。我們对这个断言来作出詳細的証明。設 $U(M)$ 在区域 (D) 的某一个內点 M_1 达到最大値，其中 $U(M)$ 是个調和函数。以 M_1 为心 ρ 为半徑在 D 內作一个球面 Σ_ρ，应用公式(14)并用函数 U 在球面 Σ_ρ 上的最大值 $U_\rho^{(\max)}$ 来替代被积函数 U。这样，我們就得到

$$U(M_1)\leqslant U_\rho^{(\max)},$$

这里等号只是当 U 在球面 Σ_ρ 上是常数而且等于 $U(M_1)$ 时才成立。依照假設，$U(M_1)$ 是 $U(M)$ 在 D 上的最大值，我們可以肯定，等号成立，于是在屬于 D 的以 M_1 为心的任何球面上及其內部 $U(M)$ 是常数。我們来証明，由此推知 $U(M)$ 在整个区域 D 上是常数。

設 N 是位于 D 内的任何一点。我們需要証明 $U(N)=$ $=U(M_1)$。用有限長度的曲綫 l 連接 M_1 与 N，例如用位于 D 内的阶形折綫，設 d 是 l 到区域 D 的界面 S 的最短距离（d 是正数）。根据以上所証，在以 M_1 为心 d 为半徑的球上 $U(M)$ 等于常数 $U(M_1)$。設 M_2 是由 M_1 算起曲綫 l 与所說的球的球面的最后一个交点。我們就有 $U(M_2)=U(M_1)$，于是依照以上所証，在以 M_2 为心 d 为半徑的球上 $U(M)$ 也等于常数 $U(M_1)$。設 M_3 是曲綫 l 与这个球的球面的最后一个交点。像上面一样，在以 M_3 为心 d 为半徑的球上函数 $U(M)$ 也等于常数 $U(M_1)$；以下依此类推。如此作出很多个这样的球就可以肯定 $U(N)=U(M_1)$，于是証完。也可以証明在 D 内 $U(M)$ 不可以有極大值或極小值。利用所証明的調和函数的性質，显然容易証明，我們在[**185**]中所說的狄义赫利的内部問題只可以有一个解。实际上，若假定在 D 内存在两个調和函数 $U_1(M)$ 与 $U_2(M)$，在这区域的界面 S 上取相同的極限值 $f(M)$，則差 $V(M)=U_1(M)-U_2(M)$ 在 D 内也滿足拉普拉斯方程，就是說，$V(M)$ 是調和函数并且在曲面 S 上各处它的極限值都等于零。根据以上的証明，由此直接推知，$V(M)$ 在整个区域 D 上恒等于零，因为否則它就应当在 D 内达到正的最大值或負的最小值，这是不可能的。如此，在整个区域 D 上狄义赫利問題的两个解 $U_1(M)$ 与 $U_2(M)$ 应当全同。同样可以証明狄义赫利外部問題的唯一性，只要注意到依照条件在无穷远点調和函数应当成为零。

对于在平面上的調和函数可以得到完全类似的性質。在这情形下替代公式(13)我們有公式

$$U(M_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{(l)}\left(U\frac{\partial \lg r}{\partial n}-\lg r\,\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds, \tag{15}$$

应用中值定理可以表达成下面的形狀：

$$U(M_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_{\lambda_R} U ds, \tag{16}$$

其中 λ_R 是以 M_0 为心、R 为半徑的圓周。对于狄义赫利外部問題，在无穷远点不是像三維的情形一样要求等于零，而只需要有任何的有限極限，于是狄义赫利問題的唯一性的証明也与以前的情形不同。我們在第四卷中講这个証明，在那里我們更仔細的考慮狄义赫利問題与聶依曼問題。

現在我們提出，任何常数是調和函数且滿足边値条件

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\rho}=0,$$

由此看出，若聶依曼問題的解加上任意常数，則得到的和也是聶依曼問題的解，且具有相同的边値 $\frac{\partial U}{\partial n}$，就是說，聶依曼問題的解的确定可以差一个任意常数項。由公式(12)也可以推知，在聶依曼內部問題的边値条件中出現的函数 $f(M)$，不可以是任意的，而应当滿足条件：

$$\iint_S f(M)dS=0。$$

最后我們提出，当 $U(M)$ 在由曲面 S 外的部分空間形成的无穷区域上是調和的时，公式(13)仍然正确。这时只是需要在无穷远点关于无穷小 $U(M)$ 的級作一些假定，只須（也必須）假定，当无限远移时，下面这不等式成立

$$R\left|U(M)\right|\leqslant A;\quad R^2\left|\frac{\partial U(M)}{\partial l}\right|\leqslant A, \tag{*}$$

其中 R 是由 M 到原点或空間任何一点的距离，A 是一个常数，l 是空間任意的方向。在所述条件下要証明公式(13)，只要对于界于曲面 S 与一个以 M_0 为心半徑很大的球面之間的有界区域应用公式(13)。当这个半徑趋向无穷时，根据以上所講的条件，沿球面的积分就等于零；于是对于位于 S 之外的任何点，我們得到公式

(13)。在第四卷中我們将看到，若当点 M 无限远移时 $U(M)$ 趋向零，則条件(*)一定满足。

195. 关于圆的狄义赫利問題的解 在前一段中我們講过狄义赫利問題只可以有一个解，但我們还不知道它一般有沒有解。我們現在不就一般情形考虑这个問題，而只限于考虑特殊情形。为此我們講求这問題的解的各种方法。由平面的情形开始。

設要求一个函数，在一个圓內是調和的，且在这个圓的圓周上取預先給定的值。設 R 是这个圓的半徑，取这圓的心作为坐标原点。这时在圓周上給定的極限値要在圓周上表示成極角的某一个已知的連續函数 $f(\theta)$。在圓內取具有極坐标 (r, θ) 的变点 M。未知函数应当满足拉普拉斯方程[**119**]：

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}=0$$

或

$$r^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+r\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}=0。\tag{17}$$

在这情形下，我們应用富里埃方法来求方程(17)的解，使具有一个只含 θ 的函数与一个只含 r 的函数的乘积的形状：

$$U=\chi(\theta)\cdot\omega(r)。\tag{18}$$

把这表达式代入到方程(17)中：

$$r^2\omega''(r)\chi(\theta)+r\omega'(r)\chi(\theta)+\chi''(\theta)\omega(r)=0,$$

或

$$\frac{\chi''(\theta)}{\chi(\theta)}=-\frac{r^2\omega''(r)+r\omega'(r)}{\omega(r)}。\tag{18_1}$$

这个方程左边只含有一个自变量 θ，右边只含有自变量 r，于是推知，两边应等于相同的常数，我們把它記作 $(-k^2)$。如此，就得到两个方程：

$$\chi''(\theta)+k^2\chi(\theta)=0 \text{ 与 } r^2\omega''(r)+r\omega'(r)-k^2\omega(r)=0。$$

在 $k\neq 0$ 时由第一个給出：

$$\chi(\theta)=A\cos k\theta+B\sin k\theta。$$

第二个是尤拉方程[92]。求它的形状为 $\omega(r)=r^m$ 的解:

$$r^2\cdot m(m-1)r^{m-2}+rmr^{m-1}-k^2r^m=0,$$

由此消去 r^m，就得到 $m^2-k^2=0$，就是 $m=\pm k$，于是只要常数 k 不等于零，这方程的一般积分就是:

$$\omega(r)=Cr^k+Dr^{-k}。$$

代入到公式(18)中就得到关于 U 的表达式:

$$U=(A\cos k\theta+B\sin k\theta)(Cr^k+Dr^{-k})。\tag{19}$$

当 $k=0$ 时，我們有方程

$$\chi''(\theta)=0 \text{ 与 } r\omega''(r)+\omega'(r)=0,$$

于是不难証明，可以得到:

$$U=(A+B\theta)(C+D\lg r)。\tag{19$_1$}$$

在公式(19)与(19_1)中，A，B，C，D 与 k 都是常数，現在我們来确定它們。注意，角度 θ 增加 2π 相当于繞坐标原点轉一圈。这时單值函数 $U(r,\theta)$ 应当回到原来的值，就是說，公式(19) 中依賴于 θ 的第一个因子应当是 θ 的以 2π 为周期的周期函数。由此推知，常数 k 只可以取整数值 $k=\pm1, \pm2, \pm3, \cdots, \pm n, \cdots$。

不过若在公式(19)中代入以 $k=n$ 或 $k=-n$，則由于系数 B 的任意性，所得到的結果恰好相同，所以常数 k 可以只限于取正整数值(問題的特征数)，就是說，$k=n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$。

由于解(19_1)的周期性需要使得常数 B 等于零。如此，我們求出下面的解:

$$U_n(r,\theta)=(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)(C_nr^n+D_nr^{-n})$$
$$(n=1, 2, 3, \cdots);$$
$$U_0(r,\theta)=A_0(C_0+D_0\lg r),$$

这里对于整数 n 的不同的值，常数可能是不同的，所以我們区别开它們的值。現在再看第二个因子，它依賴于 r，注意，在圓心，就是

当 $r=0$ 时，未知解应当是有限的，而且是連續的。由此推知，必須設所有的常数 D_n 与 D_0 都等于零。用 A_n 記任意常数 A_nC_n，用 B_n 記 B_nC_n，用 $\frac{A_0}{2}$ 記 A_0C_0，我們可以把解写成下面的形状：

$$U_n(r,\theta)=(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)r^n \quad (n=1,2,\cdots);$$

$$U_0(r,\theta)=\frac{A_0}{2}。$$

根据拉普拉斯方程是綫性的而且是齐次的，这些解的和也是个解，就是說，我們得到下面形状的解：

$$U(r,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)r^n. \tag{20}$$

現在我們依照給定的边值条件

$$U(r,\theta)\Big|_{r=R}=f(\theta) \tag{21}$$

来确定任意常数 A_n 与 B_n，其中 $f(\theta)$ 是給定在区間 $(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 上的連續系数，并且 $f(-\pi)=f(\pi)$。

这个条件給出

$$f(\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)R^n. \tag{22}$$

由此看出，在長为 2π 的区間上，例如在 $(-\pi,+\pi)$ 上，函数 $f(\theta)$ 的富里埃系数是 A_nR^n 与 B_nR^n。依照已知的公式

$$A_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\cos nt\,dt;\ B_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\sin nt\,dt \tag{23}$$

計算出 A_n, B_n，把由此得到的結果代入到公式(20)中就得出狄义赫利問題的未知解。

比較富里埃級数(22)与給出問題的解的公式(20)，可以把得到的結果叙述如下：为要得到关于圓的狄义赫利問題的解，需要写出关于边值 $f(\theta)$ 的富里埃級数，再把这級数的第 $n+1$ 項乘以 $\left(\frac{r}{R}\right)^n$。

替代无穷級数(20)，也可以把解表示成定积分的形状。把系数的表达式(23)代入到公式(20)中：

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\cos n(t-\theta)\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^n dt$$

或 $$U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(t-\theta)\right]dt。$$

由[**I,174**]中公式(14)直接得到：

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n\varphi=\frac{1-r^2}{r^2-2r\cos\varphi+1}\quad(0\leqslant r<1)。\tag{24}$$

用$\left(\frac{r}{R}\right)$替代 r，用$(t-\theta)$替代 φ，結果就得到 $U(r,\theta)$的如下的表达式：

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(t-\theta)+r^2}\,dt。\tag{25}$$

我們提出，若我們不把方程(18_1)的两边記作$(-k^2)$，而記作$(+k^2)$，則在表达式(19)中，替代$(A\cos k\theta+B\sin k\theta)$就有$(Ae^{k\theta}+$ $+Be^{-k\theta})$，而对于任何的实数 k，后面这个函数不是周期的。

引出公式(25)时，我們假定了狄义赫利問題的解存在，也就是未知函数 $U(r,\theta)$存在。此外，我們利用了 $f(\theta)$的富里埃級数展开式，这并不是必然成立的；并且我們在这表达式中直接代入了 $r=R$。所有这些迫使我們需要驗証公式(25)，就是說，我們应当証明，在 $r<R$ 的圓内，公式(25)右边的积分給出調和函数，并且 $f(\theta)$是这函数在这圓周上的極限值。我們提出，公式(25)中的积分叫做卜阿桑积分。

196. 卜阿桑积分 为簡單起見，在这一段中我們算作圓的半徑 R 等于 1，于是公式(25)可以写成下面的形状：

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}\,dt。\tag{26}$$

这个积分給出 r 与 θ 的一个函数,因为它的被积函数的第二个因子

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2} \tag{27}$$

中,除积分变量 t 外,还含有参变量 r 与 θ。这时对变量 θ 来講,函数(27)以 2π 为周期,所以函数(26)也以 2π 为周期。由显然的不等式 $1-2r\cos(t-\theta)+r^2 \geqslant 1-2r+r^2=(1-r)^2$ 推知,当 $0\leqslant r<1$ 时,表达式(27)以及它的任何阶导数都是 r 与 θ 的連續函数。由此推知,积分(26)可以在积分号下对 r 与 θ 求导数[**80**],这时求导数只涉及因子(27)。不过,利用極坐标系中拉普拉斯算子的表达式[**119**],不难驗証,函数(27)满足拉普拉斯方程。由此直接推知,当 $r<1$ 时,公式(26)确定一个調和函数 $U(r,\theta)$。只剩下要証明,它在圓周 $r=1$ 上的極限值等于 $f(\theta)$,这也就是証明的主要部分。

首先我們注意,若在公式(26)中設 $f(t)=1$,則調和函数 $U(r,\theta)$ 就恒等于 1,就是說,下面这个公式是正确的。

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}\,dt。 \tag{28}$$

我們来証明这个公式。依照(24)

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n(t-\theta) \quad (0\leqslant r<1),$$

右边的級数对 t 来講是一致收斂的,因为这个級数的項的絕对值不大于 $2r^n$。由这級数对 t 逐項求积分,就得到(28)。

确定于圓周 $r=1$ 上的函数 $f(t)$ 以 2π 为周期,就是說 $f(-\pi)=f(\pi)$。我們假定在区間 $(-\pi,\pi)$ 之外它依照周期性的規律延續,于是我們就得到了在区間 $-\infty<t<+\infty$ 内以 2π 为周期的連續函数 $f(t)$。

代替 t 我們来引入新积分变量 $t-\theta=\varphi$,即 $t=\varphi+\theta$,因而

$dt=d\varphi$。注意到$f(t)$和$\cos(t-\theta)$的周期性，我們仍然可以保留以前的积分区間$(-\pi,\pi)$[**142**]，因而可以写出：

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\varphi+\theta)\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2}d\varphi。\qquad(29)$$

設点(r,θ)趋向在圓周上的点$(1,\theta_0)$。这时我們需要証明

$$\lim U(r,\theta)=f(\theta_0)。$$

在积分(28)中作同样的变量改换，两边乘以$f(\theta_0)$，再由(29)逐項减去，得到的結果就是：

$$U(r,\theta)-f(\theta_0)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(\varphi+\theta)-f(\theta_0)]\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2}d\varphi,\qquad(30)$$

我們需要証明，当$r\to1$而$\theta\to\theta_0$时，右边的积分趋向零，就是說，只要r与1足够近而θ与θ_0足够近时，这积分的絕对值可以随意多么小。对于給定的任何正数ε，可以指出这样的η，使得在区間$-\eta\leqslant\varphi\leqslant\eta$上，当$\theta$与$\theta_0$足够近时，

$$|f(\varphi+\theta)-f(\theta_0)|<\frac{\varepsilon}{2}。\qquad(31)$$

在积分(30)中，把积分区間分为三部分：

$$(-\pi,-\eta),\ (-\eta,\eta),\ (\eta,\pi)。\qquad(32)$$

我們来估計沿第二个区間的积分的絕对值：

$$I_2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{+\eta}[f(\varphi+\theta)-f(\theta_0)]\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2}d\varphi。$$

注意到积分号下的分式是正的，我們把差$f(\varphi+\theta)-f(\theta_0)$換成它的絕对值，再应用(31)，就得到：

$$|I_2|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{+\eta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2}d\varphi,$$

或者，加寬积分区間：

$$|I_2|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2}d\varphi,$$

于是，根据(28)，

$$|I_2|<\frac{\varepsilon}{2}。\tag{33}$$

現在我們考虑沿(32)中第一个区間的积分。在这区間上 $\cos\varphi\leqslant\cos\eta$，于是

$$1-2r\cos\varphi+r^2\geqslant 1-2r\cos\eta+r^2=(1-r)^2+2r(1-\cos\eta)$$

或
$$1-2r\cos\varphi+r^2\geqslant 4r\sin^2\frac{\eta}{2}。$$

由于 $f(t)$ 是連續函数，差 $[f(\varphi+\theta)-f(\theta_0)]$ 的絕对值不超过某一个确定的正数 M。如此，对于沿(32)中第一个区間的积分我們得到估計值：

$$|I_1|<\frac{M}{8\pi r\sin^2\frac{\eta}{2}}(1-r^2)(\pi-\eta),$$

对于沿(32)中第三个区間的积分也可以得到相同的估計值。当 r 趋向1时，上面这不等式右边趋向零，于是推知，对于所有的与1足够近的 r，沿(32)第一个与第三个区間的积分之和的絕对值 $<\frac{\varepsilon}{2}$。注意(33)以及 ε 的任意小性，我們可以肯定，当 $r\to 1$ 而 $\theta\to\theta_0$ 时，等式(30)的右边确实趋向零。

現在我們指出积分(26)与函数 $f(\theta)$ 的富里埃級数的連系。这个富里埃級数具有(22)的形状，我們現在讓 $R=1$：

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta),\tag{34}$$

其中的系数是当 $R=1$ 时由公式(23)确定的。例如，若 $f(\theta)$ 滿足狄义赫利条件[**143**]，則对于任何的 θ，級数(34)收斂。不过在一般的連續函数的情形下，我們不可能这样断定。但是在任何情形下，当 $n\to\infty$ 时 A_n 与 $B_n\to 0$，于是当 $r<1$ 时，級数

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)r^n \tag{35}$$

收斂，并且由[**195**]可知，这个級数的和給出函数(26)。此外，剛才証明了，当 $r\to1$ 时級数(35)的和趋向 $f(\theta)$，就是說，它趋向一个函数，而富里埃級数(34)就是由这个函数作出来的，这里富里埃級数(34)可能是發散級数。

把这样的想法应用于任何的級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n。\tag{36}$$

若这个級数收斂而有和 s，則由冪級数理論中的亞貝尔定理[I, **148**]可知，当 $0\leqslant r<1$ 时，級数

$$\omega(r)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nr^n \tag{37}$$

收斂，再根据它在区間 $0\leqslant r\leqslant1$ 上是一致收斂的[I, **149**]，我們就有：

$$\lim_{r\to1-0}\omega(r)=s。\tag{38}$$

不过也有时級数(36)發散，而当 $0\leqslant r<1$ 时級数(37)收斂，并且当 $r\to1-0$ 时 $\omega(r)$ 有極限，就是說，(38)成立。在这情形下，s 叫做發散級数(36)在亞貝尔意义下的广义和，并且我們說，依照亞貝尔意义，級数(36)是可求和的。由上所述直接推出，对于收斂級数，这个广义和存在而且与普通的級数和全同。

以上所得到的关于卜阿桑积分的結果可以叙述如下：若对于任何的 θ，$f(\theta)$ 是連續的周期函数，則依照亞貝尔意义，它的富里埃級数是可求和的，而且广义和等于 $f(\theta)$。还要提出一点，我們討論卜阿桑积分时，讓点 (r,θ) 趋向極限点 $(1,\theta_0)$ 时，并不限制要沿着半徑，而是可取任何方式的。

設在积分(26)中 $r>1$。像以上完全一样，可以肯定，这时积

分(26)在圓周 $r=1$ 之外給出一个調和函数。为要討論它的極限值,我們把它写成下面的形状:

$$U(r,\theta)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\frac{1-\left(\frac{1}{r}\right)^2}{1-2\frac{1}{r}\cos(t-\theta)+\left(\frac{1}{r}\right)^2}dt。\quad (26_1)$$

如果在积分(26)中用 $\frac{1}{r}$ 来替代 r,就与这个积分全同,并且根据 $r>1$,我們就有 $\frac{1}{r}<1$。如此,把以上的理由,应用于公式 (26_1) 中的积分,把 r 换成 $\frac{1}{r}$,于是当点 (r,θ) 自圓周外趋向点 $(1,\theta_0)$ 时,函数 (26_1) 趋向 $f(\theta_0)$。如此,我們可以断定,函数

$$V(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\frac{r^2-1}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}dt$$

給出关于圓周 $r=1$ 外的一部分平面的,具有極限值 $f(\theta)$ 的,狄义赫利問題的解。当点 (r,θ) 无限远移时,由最后这公式看出,函数 $V(r,\theta)$ 有有限的極限:

$$\lim_{r\to\infty}V(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\,dt,$$

以上我們提到过,对于在一个封閉界綫 l 之外的平面的无穷部分,狄义赫利問題的解 $u(M)$ 是唯一的,只要假定当点 M 无限远移时,未知函数趋向有限的極限。

197. 关于球的狄义赫利問題　設 R 是球 (Σ) 的半徑,$f(M')$ 是調和函数在球面上的已知的極限值,这里 M' 是这球面上的变点。我們假設 $f(M')$ 是在球面上連續的函数。

我們現在考慮 (Σ) 內的任何一个定点 M_0,并用 r 表示空間的变点 M 到 M_0 的距离。与点 M_0 同时,我們还考慮位于球半徑 $\overline{OM_0}$ 的延長綫上的一点 M_1,它們之間具有下面的关系(圖 142):

$$\overline{OM_0}\cdot\overline{OM_1}=R^2。\quad (39)$$

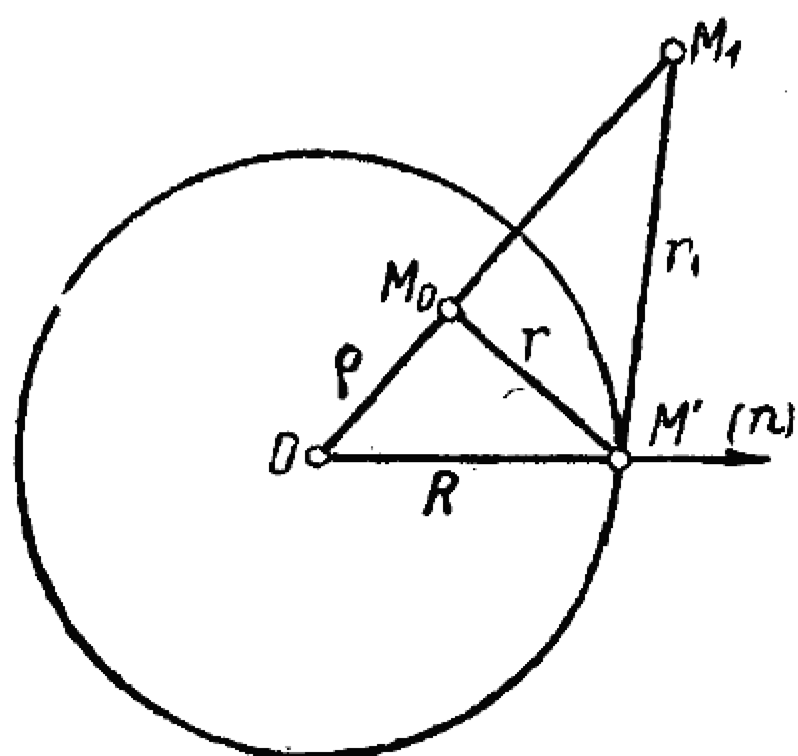


圖 142.

位于球 (Σ) 之外的点 M_1，对 (Σ) 来講，有时叫做 M_0 的对称点。用 r_1 来記变点 M 到 M_1 的距离。若 M 出現在球面 (Σ) 上某一点 M' 的位置，則 r 与 r_1 两个量由簡單的关系相連系，現在我們来求这个关系。注意，三角形 OM_0M' 与 OM_1M' 是相似的，因为它們有以 O 为頂角的公共角，并且由于(39)作成这两个角的两組边成比例。由相似性推出：

$$\frac{|M_0M'|}{|M_1M'|}=\frac{|OM_0|}{|OM'|}$$

或

$$\frac{r}{r_1}=\frac{|OM_0|}{R},$$

由此

$$\frac{1}{r_1}=\frac{\rho}{R}\cdot\frac{1}{r},\tag{40}$$

其中 $\rho=|OM_0|$ 是球心到点 M_0 的矢徑的長。函数 $\frac{1}{r_1}$ 在球内不会成为无穷大，因为 M_1 位于球外，并且在球内它是一个調和函数 **[119]**。公式(40)給出这个函数在球面上的边值。設 $U(M)$ 是狄义赫利問題的未知解。公式(13)給出：

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(\Sigma)}\left(\frac{1}{r}\ \frac{\partial U}{\partial n}-U\ \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)dS。\tag{41}$$

另一方面，应用公式(6)于調和函数 U 与 $V=\frac{1}{r_1}$，就得到：

$$0=\iint_{(\Sigma)}\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\right)dS。\tag{42}$$

(42)逐項乘以常数 $\frac{R}{4\pi\rho}$，再由(41)减去，根据(40)就消去了 $\frac{\partial U}{\partial n}$：

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{(\Sigma)}U\cdot\left[\frac{R}{\rho}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n}-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right]dS。$$

不过在 (Σ) 上 U 的值可以表示成已知函数 $f(M')$，于是我們可以写成：

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{(\Sigma)}f(M')\left[\frac{R}{\rho}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n}-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right]dS。\tag{43}$$

这个公式就解决了关于球的狄义赫利問題，因为积分号下是已知的量。我們再来变换方括号中的差。首先要注意，曲面 $r=$ =常数是以 M_0 为心的球面，所以 $\mathrm{grad}\,r$ 是一个長度为 1 的矢量，具有 $\overline{M_0M}$ 的方向，于是推知

$$\frac{\partial r}{\partial n}=\mathrm{grad}_n r=\cos(r,n),$$

而且
$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial n}=-\frac{1}{r^2}\cos(r,n)。$$

同理
$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n}=-\frac{1}{r_1^2}\cos(r_1,n),$$

其中在余弦記号下的 r 与 r_1 各記 $\overline{M_0M}$ 与 $\overline{M_1M}$ 的方向。这就給出

$$\frac{R}{\rho}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n}-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{1}{r^2}\cos(r, n)-\frac{R}{\rho r_1^2}\cos(r_1, n)。\quad(44)$$

引用一个量$\rho_1=|OM_1|=\frac{R^2}{\rho}$，由三角形$OM'M_0$与$OM'M_1$可以写成：

$$\rho^2=R^2+r^2-2Rr\cos(r, n);\ \rho_1^2=R^2+r_1^2-2Rr_1\cos(r_1, n)。$$

由此确定出$\cos(r, n)$与$\cos(r_1, n)$，代入到表达式(44)中，根据(40)与ρ_1的定义，就有：

$$\frac{R}{\rho}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n}-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{R^2-\rho^2}{Rr^3},$$

于是公式(43)可以写成下面的形状：

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi R}\iint_{(\Sigma)}f(M')\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\,dS,\quad(45)$$

或者，引用由矢徑$\overline{OM_0}$与变矢徑$\overline{OM'}$作成的角度γ，点M'的角球面坐标(θ', φ')以及点M_0的球面坐标$(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$，这里坐标原点在$O$点：

$$U(\rho, \theta_0, \varphi_0)=$$

$$=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta', \varphi')\frac{R^2-\rho^2}{(R^2-2\rho R\cos\gamma+\rho^2)^{3/2}}\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'。\quad(46)$$

所得到的表示$U(M_0)$的积分与平面情形下的卜阿桑积分类似。为要証明出現在公式(45)中的积分給出調和函数，只須証明，对于固定的点M'，分式$\frac{R^2-\rho^2}{r^3}$是M_0的調和函数。引用球面坐标系，以点M'为坐标原点，由M'到O的方向为Z軸，記作$\theta=\angle OM'M_0$。这时$\rho^2=R^2-2Rr\cos\theta+r^2$，于是

$$\frac{R^2-\rho^2}{r^3}=\frac{2R\cos\theta}{r^2}-\frac{1}{r}。$$

把这个差代入到球面坐标系的拉普拉斯方程中，就可以肯定

上述的分式是点 M_0 的調和函数。現在証明，对于球内 M_0 的任何位置，下面这公式成立：

$$\frac{1}{4\pi R}\iint_{\Sigma}\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\,dS=1。\qquad (*)$$

再引用球面坐标系，以点 O 为坐标原点，由 O 到 M_0 的方向为 Z 軸，在这情形下，$\theta=\angle M_0OM'$, $r^2=R^2-2R\rho\cos\theta+\rho^2$。出現在公式(*)中的积分就是

$$\frac{R^2-\rho^2}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{(R^2-2R\rho\cos\theta+\rho^2)^{3/2}}=$$

$$=\frac{(R^2-\rho^2)R}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{(R^2-2\rho R\cos\theta+\rho^2)^{3/2}}=$$

$$=\frac{R^2-\rho^2}{2\rho}(R^2-2\rho R\cos\theta+\rho^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{\theta=\pi}^{\theta=0},$$

或者，注意到 $\rho<R$，就得到公式(*)

$$\frac{1}{4\pi R}\iint_{\Sigma}\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\,dS=\frac{R^2-\rho^2}{2\rho}\left(\frac{1}{R-\rho}-\frac{1}{R+\rho}\right)=1。$$

最后要証明积分(45)在球面上具有边值 $f(M)$，这可以像在卜阿桑积分的情形所作的一样作。

下面的公式給出具有边值 $f(M')$ 的狄义赫利外部問題的解：

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi R}\iint_{(\Sigma')}f(M')\frac{\rho^2-R^2}{r^3}\,dS,\qquad (45_1)$$

或

$$U(\rho,\theta_0,\varphi_0)=$$

$$=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta',\varphi')\frac{\rho^2-R^2}{(R^2-2\rho R\cos\gamma+\rho^2)^{3/2}}\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'。\quad (46_1)$$

其中 $\rho=|\overline{OM_0}|$, $r=|\overline{M_0M'}|$, $\gamma=\angle M_0OM'$，不过在这情形下 $\rho>R$。像上面一样，可以肯定，公式(45_1)中的积分在球面外給出調和函数。为要驗証 $U(M_0)$ 的極限值等于 $f(M)$，把(46_1)写成

下面的形状：

$$U(\rho,\theta_0,\varphi_0)=$$

$$=\frac{\rho'}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta',\varphi')\frac{R'^2-\rho'^2}{(R'^2-2\rho'R'\cos\gamma+\rho'^2)^{3/2}}\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi',\tag{46_2}$$

其中 $\rho'=\rho^{-1}$ 而 $R'=R^{-1}$。这时 $\rho'<R'$，当点 $(\rho,\theta_0,\varphi_0)$ 趋向位于球面 Σ 上的点 $M(R,\theta,\varphi)$ 时，$(\rho',\theta_0,\varphi_0)$ 趋向 (R',θ,φ)。根据对于球内所得到的結果，我們就有：

$$\frac{R'}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta',\varphi')\frac{R'^2-\rho'^2}{(R'^2-2\rho'R'\cos\gamma+\rho'^2)^{3/2}}\sin\theta'd\theta'd\varphi'\to f(M),$$

于是，注意到 $\rho'\to R'$，就可以肯定公式 (46_2) 的右边趋向 $f(M)$，这就是我們所要証明的。还要提出，根据 (46_1)，当 M_0 点无限远移时，就是当 $\rho\to\infty$ 时，$U(\rho,\theta_0,\varphi_0)$ 趋向零。这是由于公式 (46_1) 的积分号下的分子含有 ρ^2，而分母显然与 ρ^3 同級。

198. 格林函数 由所講的关于球的狄义赫利問題的解，可以引出关于任何曲面 (S) 的狄义赫利内部問題的一般情形的討論。公式(13)不能直接給出問題的解，因为在重积分号下出現的，不仅是在曲面上具有已知値的 U，而且还有 $\frac{\partial U}{\partial n}$。为要得到問題的解，需要消去 $\frac{\partial U}{\partial n}$。設 M_0 是 (S) 内一定点。設已知函数 $G_1(M;M_0)$ 具有下述两个性質：(1)作为变点 M 的函数，它在 (S) 内是調和函数；(2)在曲面 (S) 上它的極限値等于 $\frac{1}{r}$，其中 r 是 (S) 上的变点到 M_0 的距离。設 $U(M)$ 是狄义赫利問題的未知解。应用公式(6)于調和函数 $U(M)$ 与 $G_1(M;M_0)$，可以写成：

$$0=\iint\limits_{(S)}\left[U(M)\frac{\partial G_1(M;M_0)}{\partial n}-G_1(M;M_0)\frac{\partial U(M)}{\partial n}\right]dS,$$

或者，根据关于 $G_1(M;M_0)$ 的極限条件：

$$0=\iint\limits_{(S)}\left[U(M)\frac{\partial G_1(M;M_0)}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial U(M)}{\partial n}\right]dS。$$

这个等式乘以 $\frac{1}{4\pi}$，再与(13)相加，就得到：

$$U(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)}U(M)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r}-G_1(M;M_0)\right]dS。\tag{47}$$

如果函数$G_1(M;M_0)$是已知的，这个公式就給出問題的解。在方括号中的差：

$$G(M;M_0)=\frac{1}{r}-G_1(M;M_0) \tag{48}$$

叫做关于以曲面(S)为界的区域以点M_0为極点的格林函数。由$G_1(M;M_0)$的定义推出格林函数的两个基本性質：

1. 除点M_0外，$G(M;M_0)$在(S)内是調和函数，在点M_0它成为无穷大，而差$G(M;M_0)-\frac{1}{r}$保持有界，并且在(S)内处处是調和函数。

2. 在曲面(S)上$G(M;M_0)$的極限值等于零。

如果我們把一个單位正电荷移到点M_0，并假定(S)是一个与地面連接的导面，則格林函数$G(M;M_0)$給出在(S)内所得到的电場的电动势。

在球面的情形下，根据公式(26)，函数$G_1(M;M_0)$就等于$\frac{R}{\rho}\cdot\frac{1}{r_1}$，而格林函数就是：

$$G(M;M_0)=\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\cdot\frac{1}{r_1}。 \tag{49}$$

我們得到公式(47)时，利用了公式(13)并对$U(M)$与$G_1(M;M_0)$应用了格林积分公式。应用这些积分公式的可能性需要特別証明，这些証明在于当逼近曲面(S)时对导数的研究。在对于曲面(S)以及(S)上的函数$U(M)$有較广泛的假定下，公式(47)的严格証明是 A. M. 拉普諾夫首先給出的。

对于平面的情形，完全类似的，我們有关于狄义赫利內部問題的解的公式：

$$U(M_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_l U(M)\frac{\partial G(M;M_0)}{\partial n}\,ds, \tag{47$_1$}$$

其中对于以l为界的区域，以M_0为極点的格林函数$G(M;M_0)$具有下述的两个性質：

1. 除点M_0外在(l)内$G(M;M_0)$是調和函数，在点M_0它成为无穷大，而差$G(M;M_0)-\lg\frac{1}{r}$在点M_0也是調和函数。

2. 在界綫(l)上$G(M;M_0)$的極限值等于零。

不难看出，只可能存在一个具有上述两个性質的函数。实际上，假如有两个：$G^{(2)}(M;M_0)$与$G^{(1)}(M;M_0)$，則在S或l内它們的差$G^{(2)}(M;M_0)-G^{(1)}(M;M_0)$到处是調和的，而且在$S$或$l$上的边值等于零，于是这个差在$S$或$l$内恒等于零。

199. 半空間的情形 作为应用公式(47)的特例，我們考虑关于半空間的狄义赫利問題。要求一个在半空間$z>0$上的調和函数$U(x, y, z)$，設已知它在平面$z=0$上的边值$f(x, y)$：

$$U|_{z=0}=f(x, y)。 \tag{50}$$

設r是由变点M到点$M_0(x_0, y_0, z_0)$的距离，其中$z_0>0$；r_1是由变点M到点$M_0'(x_0, y_0, -z_0)$的距离，对平面$z=0$来講，M_0'是M_0的对称点。在半空間$z>0$上分

式 $\frac{1}{r_1}$ 是点 M 的調和函数，因为 M_0' 位于这半空間之外。若 M 出現在平面 $z=0$ 上，則显然 $\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r}$。如此，在所考虑的情形下，格林函数有下面的形状：

$$G(M;M_0)=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}。$$

对于半空間 $z>0$ 来講，平面 $z=0$ 的向外的法綫的方向是与 Z 軸相反的方向，就是說，$\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial z}$，于是公式(47)給出：

$$U(x_0,\ y_0,\ z_0)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)\frac{\partial}{\partial z}\Big[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\Big]_{z=0}dx\,dy\ 。$$

对方括号內求导数后需要設 $z=0$。化簡，結果得到：

$$U(x_0,\ y_0,\ z_0)=\frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x,\ y)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}\,dx\,dy。\tag{51}$$

我們不来驗証，右边代表的是調和函数，并且当 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 趋向 $(x,\ y,\ 0)$ 时它有極限值 $f(x,\ y)$。在这情形下，无穷远点位于区域的界面上，不难驗証，所作出的解具有下述性質：若 $f(x,\ y)$ 在无穷远点連續，就是說，若当点 $(x,\ y)$ 在平面 $z=0$ 上无限远移时 $f(x,\ y)$ 有有限的确定的極限 a，則当点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 在半空間 $z>0$ 上无限远移时，$U(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 具有相同的極限 a。

換句話說就是，若 $f(x,\ y)$ 在无穷远点連續，則所作出的解在无穷远点也有所需要的極限值。

完全类似的，当考虑关于半平面 $y>0$ 的狄义赫利問題的解时，格林函数有下列的形状：

$$\lg\frac{1}{r}-\lg\frac{1}{r_1}=\lg\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}-\lg\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}},$$

并且对于边值

$$U|_{y=0}=f(x)\tag{52}$$

公式 (47_1) 給出問題的解：

$$U(x_0,\ y_0)=\frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,dx。\tag{53}$$

在第四卷中我們再仔細考虑聶依曼問題。

200. 質体的势量 在以 S 为界面的有界区域 D 上考虑非齐次拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\varphi(x, y, z)。 \tag{54}$$

这个方程的一般解是它的任何一个特解与在 D 上的調和函数之和。設有方程(54)的一个解，我們对它应用公式(9)。因为 $\frac{1}{r}$ 依任何固定方向的导数满足拉普拉斯方程，所以公式(9)中的曲面积分的被积函数在 D 上是調和函数，于是这个积分在 D 上也是調和函数。如此，那个三重积分就应当满足方程(54)。不过，根据(54)，在这积分中 ΔU 可以换成 $\varphi(x, y, z)$，如此，我們就得到方程(54)的一个特解，它的形状如下：

$$U(x, y, z)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_D \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, dv \tag{55}$$

$$\left(r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}\right)。$$

我們得到这个結果时，假定了方程(54)有解，幷且对它应用了公式(9)。为要完全解决这个問題，我們需要在对于函数 $\varphi(N)$ 有一定的假定下更細致地討論質体的势量(55)。我們設 $\mu(N)=-\frac{\varphi(N)}{4\pi}$，而来討論如下的質体的势量

$$V(M)=\iiint\limits_D \frac{\mu(N)}{r}\, dv \tag{56}$$

或

$$V(x, y, z)=\iiint\limits_D \frac{\mu(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, dv。 \tag{56_1}$$

設 $\mu(N)$ 在 D 上直到 S 連續。我們已經講过，若 M 位于 D 外，則积分(56)是个正常的积分，在这情形下 $V(M)$ 的各阶偏导数都存在。这些导数可以用在积分号下求导数的方法得到，幷且

$V(M)$满足拉普拉斯方程 $\Delta V=0$。若 M 屬于 D，則反常积分(56)存在，并且求被积函数的导数后所得到的积分也存在，例如，可以把被积函数对 x 求导数。但是不能証明这个积分就給出 V 对 x 的导数。現在我們証明两个关于积分(56)的定理：

定理 1. 若 $\mu(N)$在区域 D 上直到 S 連續，則 $V(M)$以及它的一阶偏导数在整个空間連續，并且这些偏导数可以由在积分号下求导数的方法得到。

我們就对区域 D 来講 M 在任何位置时来証明这个定理。引用一个新函数以替代 $\frac{1}{r}$，只是当 $r<\varepsilon$ 时它与 $\frac{1}{r}$ 不同，其中 ε 是一个給定的正数，这里包括到 $r=0$，这个新函数是連續的且有沿坐标軸的連續导数。为此，当 $r<\varepsilon$ 时我們用下面这多項式：$\alpha+\beta r^2=\alpha+\beta[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]$，来替代 $\frac{1}{r}$，选擇 α 与 β 使得当 $r=\varepsilon$ 时

$$\alpha+\beta\varepsilon^2=\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{而且} \quad 2\beta\varepsilon=-\frac{1}{\varepsilon^2},$$

这样在函数 $\frac{1}{r}$ 与 $\alpha+\beta r^2$ 的交接处，就是当 $r=\varepsilon$ 时，得到連續导数。上面两个公式給出：$\alpha=\frac{3}{2\varepsilon}$；$\beta=-\frac{1}{2\varepsilon^3}$，于是我們作出一个函数 $g_\varepsilon(r)$，它由下面两个等式确定：

$$\begin{aligned} &\text{当 } r\geqslant\varepsilon \text{ 时}, \quad g_\varepsilon(r)=\frac{1}{r};\\ &\text{当 } r<\varepsilon \text{ 时}, \quad g_\varepsilon(r)=\frac{3}{2\varepsilon}-\frac{1}{2\varepsilon^3}r^2. \end{aligned} \tag{57}$$

在积分(56)中代入这个函数以替代 $\frac{1}{r}$，就得到一个替代 $V(M)$ 的新函数：

$$V_\varepsilon(M)=\iiint\limits_D \mu(N)g_\varepsilon(r)\,dv, \tag{58}$$

这个函数在整个空間是連續的且有連續的偏导数，并且这些导数可以用在积分号下求导数的方法得到，因为当 $r\geqslant 0$ 时，公式(58)的积分的被积函数連續而有連續导数。例如，我們可以写成：

$$\frac{\partial V_\varepsilon(M)}{\partial x}=\iiint_D \mu(N)\frac{\partial}{\partial x}g_\varepsilon(r)dv。\tag{59}$$

作出差：

$$V(M)-V_\varepsilon(M)=\iiint_D \mu(N)\left[\frac{1}{r}-g_\varepsilon(r)\right]dv。\tag{60}$$

由于当 $r\geqslant\varepsilon$ 时 $\frac{1}{r}$ 与 $g_\varepsilon(r)$ 全同，于是对于位于以 M 为心、ε 为半徑的球 σ_ε 之外的所有的点 N，右边的差等于零。例如，若 M 位于 D 之外，而 ε 小于由 M 到 D 的距离，则(60)右边的积分等于零。

在另外的情形下，球 σ_ε 的一部或全部落在 D 上。用 m 記 $\mu(N)$ 在 D 上的最大的絕对値，并注意到 $g_\varepsilon(r)$ 是正的函数，于是对于右边的被积函数我們得到估計値

$$\left|\mu(N)\left[\frac{1}{r}-g_\varepsilon(r)\right]\right|<m\left[\frac{1}{r}+g_\varepsilon(r)\right],\tag{61}$$

以上我們說过，在球外被积函数成为零。如果我們沿整个球 σ_ε 求(61)右边的正的函数的积分，显然就得到下面的估計値：

$$|V(M)-V_\varepsilon(M)|\leqslant m\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\int_0^\pi\left[\frac{1}{r}+g_\varepsilon(r)\right]r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr。$$

依照(57)中第二个公式代入作 $g_\varepsilon(r)$，求出积分，就得到

$$|V(M)-V_\varepsilon(M)|<\frac{18\pi}{5}m\varepsilon^2。$$

由此看出，当 $\varepsilon\to 0$ 时，对于点 M 的位置来講，連續函数 $V_\varepsilon(M)$ 一致趋向 $V(M)$，所以 $V(M)$ 也是連續函数 [**I, 144**]。为要討論函数 $V(M)$ 的偏导数，由公式(56)中的积分在积分号下对 x 求导数，把所得到的函数記作 $W(M)$：

$$W(M)=\iiint\limits_D \mu(N)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dv。\tag{62}$$

像以上一样，作出差：

$$W(M)-\frac{\partial V_\varepsilon(M)}{\partial x}=\iiint\limits_D \mu(N)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial x}g_\varepsilon(r)\right]dv。$$

注意，对于任何的函数 $h(r)$ 我們有

$$\frac{\partial}{\partial x}h(r)=\frac{dh(r)}{dr}\,\frac{x-\xi}{r},$$

这里 $\left|\frac{x-\xi}{r}\right|\leqslant 1$，对于上面积分中的被积函数可以写出不等式：

$$\left|\mu(N)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial x}g_\varepsilon(r)\right]\right|\leqslant m\left[\frac{1}{r^2}+\left|\frac{dg_\varepsilon(r)}{dr}\right|\right],$$

于是，像以上完全一样：

$$\left|W(M)-\frac{\partial V_\varepsilon(M)}{\partial x}\right|\leqslant$$

$$\leqslant m\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\int_0^\pi\left[\frac{1}{r^2}+\left|\frac{dg_\varepsilon(r)}{dr}\right|\right]r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr。$$

注意，根据(57)：

$$\left|\frac{dg_\varepsilon(r)}{dr}\right|=\frac{r}{\varepsilon^3}\quad(r\leqslant\varepsilon),$$

求出积分，就得到：

$$\left|W(M)-\frac{\partial V_\varepsilon(M)}{\partial x}\right|\leqslant 5\pi m\varepsilon,$$

由此推知，当 $\varepsilon\to 0$ 时，对 M 来講，导数 $\frac{\partial V_\varepsilon(M)}{\partial x}$ 一致趋向 $W(M)$。以上已經証明了 $V_\varepsilon(M)$ 一致趋向 $V(M)$。注意[I, **144**]中的定理，我們就知道，$W(M)$ 是 $V(M)$ 对 x 的偏导数，就是說，根据(62)，

$$\frac{\partial}{\partial x}\iiint\limits_D \mu(N)\frac{1}{r}dv=\iiint\limits_D \mu(N)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dv。$$

由偏导数(59)的連續性以及它們一致趋向$W(M)$推出$W(M)$是連續的，于是这个定理完全証完。对y与z的导数可以同样討論。注意，証明这个定理时，我們只利用了$\mu(N)$的可积性及有界性。

201. 卜阿桑方程　为要作出函数$V(M)$的二阶导数我們应当加强对于$\mu(N)$的假定。

定理 2. 若連續函数$\mu(N)$在D内有連續的一阶导数，則$V(M)$在D内有連續的二阶导数而且滿足方程：

$$\Delta V(M) = -4\pi\mu(M)。\tag{63}$$

在D内我們固定任何一个点$M_0(x_0, y_0, z_0)$。設σ_ε是D内的以M_0为心、ε为半徑的球，而D_1是位于σ_ε以外的一部分D。把势量(56)分为两項：

$$V(M) = \iiint\limits_{D_1} \mu(N)\frac{1}{r}dv + \iiint\limits_{\sigma_\varepsilon} \mu(N)\frac{1}{r}dv =$$

$$= V_1(M) + V_0(M), \tag{64}$$

于是，根据定理 1：

$$\frac{\partial V(M)}{\partial x} = \iiint\limits_{D_1} \mu(N)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dv + \iiint\limits_{\sigma_\varepsilon} \mu(N)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dv =$$

$$= \frac{\partial V_1(M)}{\partial x} + \frac{\partial V_0(M)}{\partial x}。\tag{65}$$

我們有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}),$$

于是可以写成：

$$\mu(N)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\mu(N)\frac{1}{r}\right] + \frac{\partial \mu(N)}{\partial \xi}\cdot\frac{1}{r}。$$

把这个表达式代入到公式(65)代替沿σ_ε的积分中的被积函数，应用奥斯特洛格拉得斯基公式，就得到：

$$\frac{\partial V(M)}{\partial x}=\iiint\limits_{D_1}\mu(N)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dv+$$

$$+\iiint\limits_{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\mu(N)}{\partial\xi}\cdot\frac{1}{r}\,dv-$$

$$-\iint\limits_{S_\varepsilon}\mu(N)\cos(n,\,x)\,\frac{1}{r}\,dS, \qquad (66)$$

其中 S_ε 是球 σ_ε 的球面，n 是在 N 点 S_ε 的向外的法綫的方向。对于位于 σ_ε 内的点 M 来講，右边第一項是个正常积分，并且在 σ_ε 内它有各阶的导数。第三項是沿球面 S_ε 的曲面积分，对于它也有相同的肯定。第二項是沿 σ_ε 的具有連續密度 $\frac{\partial\mu(N)}{\partial\xi}$ 的容积积分，根据定理 1，在整个空間它有連續的一阶导数。如此，可以肯定，在 σ_ε 内 $\frac{\partial V(M)}{\partial x}$ 有連續的一阶导数。注意到点 M_0 在 D 内选擇的任意性，可以肯定，$\frac{\partial V(M)}{\partial x}$ 在 D 内到处都有連續的一阶导数。应用相同的理由来討論 $\frac{\partial V(M)}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial V(M)}{\partial z}$，可以肯定，在 D 内 $V(M)$ 有連續的二阶导数。剩下要証明公式(63)对于 D 内任何的点 M_0 都成立。

回到公式(64)与(66)。我們知道，沿区域 D_1 的質体的势量 $V_1(M)$ 在 σ_ε 内是調和函数，因为 σ_ε 位于 D_1 之外，就是說在 σ_ε 内 $\Delta V_1(M)=0$，于是在 σ_ε 内 $\Delta V(M)=\Delta V_0(M)$。如此，为要作出 $\Delta V(M)$，只須取(66)中沿 σ_ε 与 S_ε 的积分那两項，在积分号下对 x 求导数(利用定理 1)，并作出对 y 与 z 的类似的二阶导数的表达式，再把这三个导数相加。这时需要注意，在积分号下只是因子 $\frac{1}{r}$ 依賴于$(x,\,y,\,z)$。如此在 σ_ε 内作出 $\Delta V(M)$，我們取出它在球 σ_ε 的心 M_0 的值。用 $\Delta V(M_0)$ 記这个值，用 r_0 記由 M_0 到积分变点的距离，就得到：

$$\Delta V(M_0)=\iiint\limits_{\sigma_\varepsilon}\Big[\frac{\partial\mu(N)}{\partial\xi}\ \frac{\xi-x_0}{r_0^3}+\frac{\partial\mu(N)}{\partial\eta}\ \frac{\eta-y_0}{r_0^3}+$$

$$+\frac{\partial\mu(N)}{\partial\zeta}\ \frac{\zeta-z_0}{r_0^3}\Big]dv-\iint\limits_{S_\varepsilon}\mu(N)\Big[\frac{\xi-x_0}{r_0^3}\cos(n,x)+$$

$$+\frac{\eta-y_0}{r_0^3}\cos(n,y)+\frac{\zeta-z_0}{r_0^3}\cos(n,z)\Big]dS。\qquad(67)$$

对于所选擇的任何半徑 ε，只要球 σ 位于 D 内，这个公式总是正确的，于是显然 $\Delta V(M_0)$ 的大小不依賴于所选擇的 ε。讓 ε 趋向零。我們来証明，这时三重积分趋向零。只須考虑第一項的积分。設在某一个固定的充分小的球 σ_{ε_0} 上連續函数 $\dfrac{\partial\mu(N)}{\partial\xi}$ 的最大絕对值是 m。当 $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时，注意 $\left|\dfrac{\xi-x_0}{r_0}\right|\leqslant 1$，就有：

$$\left|\iiint\limits_{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\mu(N)}{\partial\xi}\cdot\frac{\xi-x_0}{r_0^3}\,dv\right|\leqslant m\iiint\limits_{\sigma_\varepsilon}\frac{dv}{r_0^2}。$$

引用以 M_0 为原点的球面坐标，并替换 $dv=r_0^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr_0$，就可以求得右边的表达式等于 $m\cdot 4\pi\varepsilon$，由此推知，当 $\varepsilon\to 0$ 时，这个三重积分趋向零。

現在再看公式(67)中的曲面积分。注意到向外的法綫 n 的方向是沿球半徑的方向，我們有：

$$\frac{\xi-x_0}{r_0^3}\cos(n,x)+\frac{\eta-y_0}{r_0^3}\cos(n,y)+\frac{\zeta-z_0}{r_0^3}\cos(n,z)=$$

$$=\frac{1}{r_0^2}\left[\cos^2(n,x)+\cos^2(n,y)+\cos^2(n,z)\right]=\frac{1}{r_0^2},$$

于是这曲面积分可以写成下面的形狀：

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{S_\varepsilon}\mu(N)dS,$$

或者，应用中值定理：

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{S_\varepsilon}\mu(N)\,dS=4\pi\mu(N_\varepsilon),$$

其中 N_ε 是 S_ε 上某一个点。当 $\varepsilon\to 0$ 时，点 N_ε 趋向点 M_0，$\mu(N_\varepsilon)\to\to\mu(M_0)$，公式(67)中曲面积分的極限給出 $4\pi\mu(M_0)$，这就导出了公式(63)。这个公式通常叫做卜阿桑公式或卜阿桑方程。

由所証的定理直接推知，若 $\varphi(x, y, z)$ 在区域 D 上直到界面 S 为連續，而且在 D 内它有連續的一阶偏导数，則公式(55)給出方程(54)的解。注意，若 $\varphi(N)$ 确定于整个空間上，并且当点 N 无限远移时它下降得足够快，則可以取整个空間作为 D。

对于沿平面区域的积分，可以証明完全类似的定理：

$$V(M)=\iint\limits_B\mu(N)\lg\frac{1}{r}\,d\sigma$$

或

$$V(x, y)=\iint\limits_B\mu(\xi, \eta)\lg\frac{1}{r}\,d\sigma$$

$$(r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2})。$$

若 $\mu(N)$ 在区域 B 上直到界綫連續，則 $V(M)$ 在整个平面上連續而有連續的一阶偏导数，并且这些导数可以由在积分号下求导数的方法得到。此外，若在 B 内 $\mu(N)$ 有連續的一阶偏导数，則在 B 内 $V(M)$ 有連續的二阶偏导数，并且在 B 内每一点滿足卜阿桑方程：

$$\Delta V(M)=-2\pi\mu(N)。$$

与积分(55)一起，我們作一个积分

$$U_1(M)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_D\varphi(N)G(M;N)\,dv, \tag{55$_1$}$$

其中 $G(M;N)$ 是在 D 内的具有極点 N 的格林函数。在积分(55$_1$)中要对点 N 求积分。注意公式(49)，可以写成

$$U_1(M)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_D\frac{\varphi(N)}{r}\,dv+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_D\varphi(N)G_1(M;N)\,dv,$$

其中 $G_1(M;N)$ 在 D 内到处是 M 点的調和函数，而且在 S 上有極限值 $\frac{1}{\rho}$，其中 ρ 是 S 上的变点到点 N 的距离。右边第二个积分的积分号下的 M 是个参变数，所以这个积分是点 M 的函数，又由于在 D 内到处 $G_1(M;N)$ 是調和函数，于是在 D 内右边第二个积分是 M 的調和函数。已經証明过右边第一项經过拉普拉斯算子的作用后等于 $\varphi(M)$，如此，由公式 (55_1) 确定的函数 $U_1(M)$ 滿足方程(54)。再注意，如果 M 出現在曲面 S 上，则 $G(M;N)$ 等于零；以 (55_1) 为基础，我們看到，$U_1(M)$ 在 S 上滿足边值条件

$$U_1(M)\Big|_S=0。$$

总之，公式 (55_1) 确定出方程(54)的滿足上面这边值条件的解。解 (55_1) 的極限值可以由当点 (x, y, z) 出現在 S 上时右边的积分之值求得，它依賴于 $\varphi(x, y, z)$。注意，以上所講的关于函数 (55_1) 的討論不是完全严格的。需要补充討論 $G(M;N)$ 对点 N 的依賴性，証明在积分号下求导数的可能性，以及当 M 趋向曲面 S 上的点时，在积分号下取極限的可能性(参看第四卷)。

232. 克希荷夫公式 对于在曲面 S 内的調和函数，公式(13)給出它在任何内点的值表示成沿曲面 S 的积分的形状。对于滿足波动方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=a^2\Delta V \tag{68}$$

的函数 $V(x, y, z, t)=V(M;t)$ 可以得到类似的公式。設在以曲面 S 为界的区域 D 上，函数 $V(M;t)$ 以及它的直到二阶的导数在 $t>0$ 时都是連續的。設 M_0 是 (D) 内某一个固定的点。用 r 記由 M_0 到变点 M 的距离：$r=M_0M$。应用一般公式(9)于函数

$$U(x, y, z, t)=V\left(x, y, z, t-\frac{r}{a}\right), \tag{69}$$

或簡写成

$$U(M;t)=V\left(M;t-\frac{r}{a}\right)。\tag{70}$$

若 $\omega(t)$ 是 t 的某个函数，則把在 $\omega(t)$ 中用 $t-\frac{r}{a}$ 替代 t 所得到的函数記作 $[\omega]$，就是 $[\omega]=\omega\left(t-\frac{r}{a}\right)$。

通常 $[\omega]$ 叫做函数 $\omega(t)$ 的推后值。如果把 a 算作是某一个过程的傳播速度，这个意义就很清楚。

用这样記法时，我們可以把公式(69)与(70)写成：$U=[V]$。对函数(69)关于坐标求导数时，要注意到 $[V]$ 不只直接依賴于坐标，而且通过中間变量 r，它出現在第四个变量中，如此我們就有

$$\frac{\partial U}{\partial n}=\left[\frac{\partial V}{\partial n}\right]-\frac{1}{a}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\frac{\partial r}{\partial n}。 \tag{71}$$

同样，利用以 M_0 为心的極坐标系中拉普拉斯算子的表达式[119]：

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2},$$

并注意
$$\frac{\partial U}{\partial\theta}=\left[\frac{\partial V}{\partial\theta}\right];\ \frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}=\left[\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\right];\ \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=\left[\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right];$$

$$\frac{\partial U}{\partial r}=\left[\frac{\partial V}{\partial r}\right]-\frac{1}{a}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right];\ \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}=\left[\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right]-\frac{2}{a}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial r}\right]+\frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right],$$

就得到：
$$\Delta U=[\Delta V]-\frac{2}{a}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial r}\right]+\frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right]-\frac{2}{ar}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]。$$

不过，根据(68)，我們有 $[\Delta V]=\frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right]$，于是：

$$\Delta U=\frac{2}{a}\left\{\frac{1}{a}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right]-\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial r}\right]-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\right\}。$$

不难証明，

$$-\frac{\Delta U}{r}=-\frac{2}{a}\left\{\frac{1}{ar}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right]-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial r}\right]-\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\right\} \tag{72}$$

是某一个矢量的散度：

$$-\frac{\Delta U}{r}=\operatorname{div}\left\{\frac{2}{a}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\operatorname{grad}(\lg r)\right\}。 \tag{73}$$

实际上，我們有公式[112]：

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{A})=f\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\operatorname{grad}f\cdot\boldsymbol{A}。$$

在这情形下 $f=\frac{2}{a}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]$，而 $\boldsymbol{A}=\operatorname{grad}(\lg r)$ 是一个長度为 $\frac{1}{r}$ 的矢量，沿由 M_0 所作的矢徑方向。数量积 $\operatorname{grad}f\cdot\boldsymbol{A}$ 是 $|\boldsymbol{A}|$ 与 $\operatorname{grad}f$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的方向上的投影之乘积，就是 $|\boldsymbol{A}|$ 与 f 沿矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向的导数之乘积。于是在这情形下就有

$$\operatorname{div}\left\{\frac{2}{a}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\operatorname{grad}\lg r\right\}=\frac{2}{a}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\Delta\lg r+\frac{2}{ar}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]。$$

应用(72)并依照求复合函数的导数法則求 $\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]$ 的导数，就可以証明公式(73)的正确性。再应用奥斯特洛格拉得斯基公式并注意 $\operatorname{grad}_n(\lg r)=\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}$，就得到：

$$-\iiint\limits_{(D)}\frac{\Delta U}{r}\,dv=\frac{2}{a}\iint\limits_{(S)}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\,dS。$$

把这个表达式以及表达式(71)代入到公式(9)的右边，并注意 $U(M_0,t)=V(M_0,t)$，因为在点 M_0 我們有 $r=0$，就得到克希荷夫公式：

$$V(M_0;\,t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)}\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial n}\right]+\frac{1}{ar}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\frac{\partial r}{\partial n}-[V]\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right\}dS。\tag{74}$$

这个公式通过 V，$\frac{\partial V}{\partial t}$ 与 $\frac{\partial V}{\partial n}$ 在曲面 (S) 上的推后值表达出 $V(M_0;\,t)$。在这情形下，像在关于調和函数的公式（9）中一样，由于有 $\frac{\partial V}{\partial n}$ 出現，使得应用公式(74)不能直接給出連系于波动方程的問題的解。克希荷夫所給的公式(74)紧密的連系着惠更斯原理。

設 (S) 是以 M_0 为心、r 为半徑的球面。在这情形下，$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial r}$，于是公式(74)可以写成下面的形状：

$$V(M_0;\,t)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{(S)}\left\{r\left[\frac{\partial V}{\partial r}\right]+\frac{r}{a}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]+[V]\right\}dS,$$

或者讓 $dS=r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=r^2d\omega$：

$$V(M_0;\,t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)}\left[\frac{\partial(rV)}{\partial r}\right]d\omega+\frac{r}{4\pi a}\iint\limits_{(S)}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]d\omega。\tag{75}$$

若球的半徑 $r=at$，則 $t-\frac{r}{a}=0$，就是說，当 $t=0$ 时，推后值化为函数值，于是公式(75)給出[**181**]中的卜阿桑公式(81)，它是在无界空間中关于振动傳播問題的解，而有給定的初始条件

$$V(M_0;\,t)=\frac{t}{4\pi}\iint\limits_{(S_{at})}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_0 d\omega+\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\left\{t\iint\limits_{(S_{at})}(V)_0 d\omega\right\},\tag{76}$$

这里附标零表示要在 $t=0$ 时取 $\frac{\partial V}{\partial t}$ 与 V，再沿以 M_0 为心、at 为半徑的球面求积分。克希荷夫公式的形状紧密的連系着推后电势的概念。以上我們看到，对于任何选定的具有直到二阶导数的函数 $\omega(t)$，函数

$$\frac{1}{r}\,\omega\left(t-\frac{r}{a}\right)=\frac{[\omega]}{r}\tag{77}$$

是方程(68)的解。这里 r 是由空間任何一个固定的点到变点的距离[**175**]。

与以上完全类似，对于非齐次波动方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=a^2\Delta V+f(x,\,y,\,z,\,t)\tag{78}$$

的任何解，在区域 D 上可以作出克希荷夫公式，这个公式，除曲面积分外，还含有一个三重积分

$$V(M_0;t)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial n}\right]+\frac{1}{ar}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\frac{\partial r}{\partial n}-[V]\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right\}dS+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_D\frac{[f]}{r}dv。\tag{79}$$

把这个公式应用于以 M_0 为心、at 为半徑的球，对于当 $t=0$ 时满足零初始值的解，我們得到[174]中公式(91)。

§ 21. 热傳导方程

203. 基本方程 我們講过，在均匀介質中热傳导方程具有下面的形状

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right),\tag{1}$$

其中

$$a=\sqrt{\frac{k}{\gamma\rho}},\tag{2}$$

k 是热的内傳导系数，γ 是物質的热容量，ρ 是密度。除方程(1)外还需要注意到初始条件，它給出 $t=0$ 时温度的初始分布

$$u\Big|_{t=0}=f(x,y,z)。\tag{3}$$

若物体以曲面 (S) 为界，则在这曲面上我們就有边值条件，按照物理的情况，边值条件可以是不同的。例如，曲面 (S) 可以具有确定的温度，它可以随时間改变。在这情形下，边值条件就是曲面 (S) 上的一个已知函数 U，这个已知函数可以依賴于时間 t。若曲面的温度不是固定的，而在周圍的介質中放射有已知的温度 U_0，则依照牛頓定律，虽然这是很不准确的，通过曲面 (S) 的热量与周圍空間的温度和物体界面 (S) 的温度之差成正比。这就給出下面形状的边值条件：

$$\frac{\partial U}{\partial n}+h(U-U_0)=0 \qquad (\text{在 } S \text{ 上}), \tag{4}$$

其中的比例系数 h 叫做热的外傳导系数。

在一維物体中，就是說在均匀的樞軸中，我們算作它是沿着 X 軸安置的，关于热的分布情形有下面的方程以替代方程（1）：

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}。\tag{5}$$

对于这样形式的方程，自然不考虑樞軸的界面与周圍空間之間的热的交流。

假定 U 不依賴于 y 与 z，由方程（1）也可以得到方程（5）。在樞軸的情形初始条件就是：

$$U\Big|_{t=0}=f(x)。\tag{6}$$

如果樞軸是有界的，則在两端有边値条件，像上面一样，端点可以具有确定的溫度。在放射的情形，边値条件（4）就有下面的形状：

$$\frac{\partial U}{\partial x}\mp h(U-U_0)=0 \qquad (\text{在端点}), \tag{7}$$

其中，对于左端，就是横坐标 x 最小的一端，用（－）号，对于右端用（＋）号，h 是一个正的常数。

204. 无界的樞軸　我們先講无界的樞軸，对于它，除方程（5）外，只需要满足初始条件（6）。依照富里埃法，我們首先求下面形状的特解：

$$T(t)X(x),$$

这就給出
$$T'(t)X(x)=a^2T(t)X''(x),$$

或
$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2,$$

其中 λ^2 是常数。如此，我們得到：

$$T'(t)+\lambda^2a^2T(t)=0;\quad X''(x)+\lambda^2X(x)=0, \tag{8}$$

由此，弃去 $T(t)$ 的表达式中的常数因子：

$$T(t)=e^{-\lambda^2a^2t},\quad X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x;$$

这里常数 A 与 B 可能依赖于 λ。

由于这里沒有任何的边值条件，所以参变量 λ 保持完全是任意的，于是把函数 $u(x,t)$ 作成下面形状的和

$$\sum_{(\lambda)}e^{-\lambda^2a^2t}[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]$$

时，λ 的所有的值具有同等的意义。于是替代依 λ 的各别的值的和我們取由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 依参变量 λ 的积分，就是說，設：

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda。\qquad (9)$$

应用在定积分号下求导数的公式，不难驗証，这个函数确实給出方程(5)的解。現在我們来看初始条件(6)，它給出

$$u\Big|_{t=0}=f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda。\qquad (10)$$

把右边的积分与关于 $f(x)$ 的富里埃公式：

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\cos\lambda x\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi+\sin\lambda x\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi\right]d\lambda$$

相比較，我們就看出，設

$$A(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi,\ B(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi,$$

則条件(10)就可以滿足。

把得到的关于 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 的表达式代入到(9)中，就得到

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}[\cos\lambda\xi\cos\lambda x+\sin\lambda\xi\sin\lambda x]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(\xi-x)d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)d\xi\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(\xi-x)d\lambda,\qquad (11)$$

其中我們利用了被积函数是 λ 的偶函数这个事实。

公式(11)給出問題的解，不过还可以簡化。为此只須注意到[81]：

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2\lambda^2}\cos\beta\lambda\,d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\,e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}},$$

于是 $$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(\xi-x)\,d\lambda=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}},$$

如此，公式(11)就取下面的形状：

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi\,。\tag{12}$$

在上面的和以后的所有計算中，当然我們要設 t 是正的。表示成这样形式的解具有很重要的物理意义。首先我們提出，函数

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\tag{13}$$

考虑作 (x,t) 的函数时，也是方程(5)的解，这可以由得出它的方法看出来，也可以直接求导数来驗証。这个解有什么物理意义呢？

取樞軸在 x_0 点附近的一个小單元 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，設函数 $f(x)$ 在区間 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 之外等于零，而在其内有常数值 U_0。物理上可以这样提出这个事实，在初始时刻这个單元吸收了热量 $Q=2\delta c\rho U_0$，使得在这一段上温度增高 U_0。此后，樞軸上的温度的分布就由公式(12)給出，在这情形下，公式(12)取下面的形状：

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}U_0\,\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi=\frac{Q}{2c\rho a\sqrt{\pi t}}\,\frac{1}{2\delta}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi\,。$$

如果我們讓 δ 逼近 0，就是說，我們設分布在整个一小段上的热量 Q 在極限情形只作用在 x_0 点，則在点 $x=x_0$ 有瞬間热源，强度为 Q。由于这样的热源，在樞軸上所得到的温度的分布就依照下面这公式：

$$\lim_{\delta\to0}\frac{Q}{2c\rho a\sqrt{\pi t}}\,\frac{1}{2\delta}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi\,。$$

由于依照中值定理

$$\frac{1}{2\delta}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi = e^{-\frac{(\xi_0-x)^2}{4a^2t}}\text{，其中 } x_0-\delta<\xi_0<x_0+\delta,$$

所以当 $\delta\to 0$ 时 $\xi_0\to x_0$，上面的表达式就成为：

$$\frac{Q}{c\rho}\,\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2t}}。$$

因而，函数(13)给出温度的分布，它是樞軸在初始时刻 $t=0$ 在点 $x=\xi$（x_0 换成 ξ）受到强度为 $Q=c\rho$ 的瞬間热源的作用而产生的。現在再看解(12)的物理意义就很明显了。为要在初始时刻使樞軸在断面 ξ 处具有温度 $f(\xi)$，在这点附近的一个小單元 $d\xi$ 上应当分配有热量

$$dQ=c\rho f(\xi)d\xi,$$

或者，在点 $x=\xi$ 有强度为 dQ 的瞬間热源；依照公式(13)这个热源所产生的温度的分布就是：

$$f(\xi)d\xi\,\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}。$$

在樞軸的所有的点初始温度 $f(\xi)$ 的总的作用是由这些各别單元的作用和成的，这就給出上面得到的解(12)：

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi。$$

設在初始时刻 $t=0$，温度 $f(x)$ 除某一个区間 (α_1, α_2) 外到处都等于零，而在这区間上它是正的。在这情形下解(12)就是：

$$u(x,t)=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}f(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi。\tag{14}$$

如果取 t 非常靠近于 0 而 x 随意多大，就是說，如果在开始后非常近的时刻取樞軸上随意多远的点，对于 $u(x,t)$ 由公式(14)得到正值，因为被积函数是正的。如此，由公式(12)推出这样的情况，就是热并非以任何有限的速度分布，而是瞬間的。这是热傳导

方程与我們考虑弦的振动时的波动方程的本質上的不同。

对于无界三維介質中热的分布情形，我們有微分方程(1)以及初始条件(3)，于是替代公式(12)，解就是：

$$u(x, y, z, t)=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta,\zeta)\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{4a^2t}} d\xi d\eta d\zeta 。 \tag{15}$$

現在我們来驗証，公式(12)所确定的函数滿足方程(5)以及初始条件(6)。第一个断言可以由下述事实直接推出，就是函数(13)滿足方程(5)以及公式(12)中的积分在积分号下对 t 与 x 求导数的可能性，例如，若 $f(x)$ 沿区間 $(-\infty, +\infty)$ 連續而且絕对可积就成。为要驗証初始条件(6)，我們依照下式引用新变量 α 以替代 ξ：

$$\alpha=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}},$$

把公式(12)改写成下面的形状：

$$u(x, t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\alpha\, 2a\sqrt{t})e^{-\alpha^2}d\alpha 。 \tag{16}$$

再回忆公式[78]

$$1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2}d\alpha 。 \tag{17}$$

把它乘以 $f(x)$ 再由(16)式减掉：

$$u(x, t)-f(x)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x+\alpha\, 2a\sqrt{t})-f(x)]e^{-\alpha^2}d\alpha,$$

由此

$$|u(x, t)-f(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+\alpha\, 2a\sqrt{t})-f(x)|e^{-\alpha^2}d\alpha。 \tag{18}$$

除去連續性与絕对可积性外，我們还假設 $f(x)$ 是有界的，就

是說 $|f(x)|\leqslant c$，如此，对于任何的 x, t 以及 α 我們有：$|f(x+\alpha 2a\sqrt{t})-f(x)|\leqslant 2c$。設 ε 是給定的正数。可以固定一个这样的大正数 N，使得

$$\frac{2c}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-N} e^{-\alpha^2}d\alpha\leqslant\frac{\varepsilon}{3},\quad 并且\ \frac{2c}{\sqrt{\pi}}\int_{N}^{\infty} e^{-\alpha^2}d\alpha\leqslant\frac{\varepsilon}{3}。$$

这时，由(18)就推出：

$$|u(x, t)-f(x)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-N}^{+N}|f(x+\alpha 2a\sqrt{t})-f(x)|e^{-\alpha^2}d\alpha。$$

由于 $f(x)$ 的連續性，可以断定，对于所有的与零足够近的 t，当 $|\alpha|\leqslant N$ 时，我們有：

$$|f(x+\alpha 2a\sqrt{t})-f(x)|\leqslant\frac{1}{3}\varepsilon,$$

于是上一个不等式給出：

$$|u(x, t)-f(x)|\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-N}^{+N} e^{-\alpha^2}d\alpha,$$

自然

$$|u(x, t)-f(x)|\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2}d\alpha,$$

就是說，根据(17)，我們有：对于所有的与零足够近的 t，$|u(x, t)-f(x)|\leqslant\varepsilon$，由此，根据 ε 的任意性，于是推出：

$$\lim_{t\to+0} u(x, t)=f(x),$$

这就是初始条件(6)。注意，t 是由正値趋向零的。若 m 与 M 是 $f(x)$ 的界值，就是說 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，則由(16)推出

$$\frac{m}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2}d\alpha\leqslant u(x, t)\leqslant\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2}d\alpha,$$

于是，根据(17)，就有 $m\leqslant u(x, t)\leqslant M$，就是說，对于所有的正的 t，温度 $u(x, t)$ 与初始温度具有相同的界値。像以上完全一样可以驗証公式(15)。

205. 一端有界的棓軸 設棓軸 $x\geqslant 0$ 界于一端 $x=0$；并設在这一端的周圍介質的温度为零。

在这情形下，除初始条件(6)外，我們还有边值条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=hu\Big|_{x=0}, \tag{19}$$

另一方面，解(12)并不直接适用，因为根据初始条件，被积函数 $f(x)$ 只确定于区間 $(0,\infty)$ 上。因而，为要应用公式(12)，就应当把函数 $f(x)$ 延續到区間 $(-\infty,0)$ 上。

为了这个目的，把公式(12)改写成：

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\left[f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+f(-\xi)e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi, \tag{20}$$

这是容易証明的，把 $\int_{-\infty}^{+\infty}$ 分为两个：$\int_{-\infty}^{0}$ 与 $\int_{0}^{+\infty}$，再在第一个中用 $(-\xi)$ 来替换 ξ 就成了。为要代入到公式(19)中，我們来計算：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\left[f(\xi)\frac{\xi-x}{2a^2t}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-f(-\xi)\frac{\xi+x}{2a^2t}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi。$$

当 $x=0$ 时，由此求得：

$$u|_{x=0}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}[f(\xi)+f(-\xi)]d\xi;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}[f(\xi)-f(-\xi)]\frac{\xi d\xi}{2a^2t}。$$

用分部积分法，就有①：

$$\int_0^{\infty}f(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\frac{\xi d\xi}{2a^2t}=-\int_0^{\infty}f(\xi)d\left(e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\right)=-e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}f(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty}+$$

$$+\int_0^{\infty}f'(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}d\xi=f(+0)+\int_0^{\infty}f'(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}d\xi,$$

同理
$$\int_0^{\infty}f(-\xi)e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\frac{\xi d\xi}{2a^2t}=f(-0)-\int_0^{\infty}f'(-\xi)e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}d\xi。$$

我們假定 $f(x)$ 延續到区間 $(-\infty,0)$ 上时是連續的。这时显然

$$f(+0)=f(-0)=f(0),$$

于是
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}[f'(\xi)+f'(-\xi)]d\xi;$$

条件(19)就成为

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\{[f'(\xi)+f'(-\xi)]-h[f(\xi)+f(-\xi)]\}d\xi=0,$$

---

① 假設当 $\xi\to\infty$ 时 $e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}f(\xi)\to 0$。

它一定被滿足,只要設

$$f'(-\xi)+f'(\xi)=h[f(-\xi)+f(\xi)],$$

或者,姑且記作

$$\Phi(\xi)=f(-\xi);\ \Phi'(\xi)=-f'(-\xi),$$

由下面这微分方程来确定未知函数 $\Phi(\xi)$:

$$\Phi'(\xi)+h\Phi(\xi)=f'(\xi)-hf(\xi)\quad(\xi\geqslant 0)。$$

求这个方程的积分,就得到:

$$\Phi(\xi)=e^{-h\xi}\left\{C+\int_0^\xi e^{h\xi}[f'(\xi)-hf(\xi)]d\xi\right\}。$$

讓 $\xi=0$, 确定出常数 C:

$$C=\Phi(0)=f(0),$$

并且由于

$$\int_0^\xi e^{h\xi}f'(\xi)d\xi=f(\xi)e^{h\xi}\Big|_{\xi=0}^{\xi=\xi}-h\int_0^\xi e^{h\xi}f(\xi)d\xi=e^{h\xi}f(\xi)-f(0)-h\int_0^\xi e^{h\xi}f(\xi)d\xi,$$

所以

$$f(-\xi)=\Phi(\xi)=f(\xi)-2he^{-h\xi}\int_0^\xi e^{h\xi}f(\xi)d\xi。$$

把这个关于 $f(-\xi)$ 的表达式代入到公式(20)中,我們就得到这个問題的最后的解。注意,由最后一个公式推出当 $\xi\to+0$ 时 $f(-0)=f(+0)$,就是說,$f(x)$ 延續到区間 $(-\infty, 0)$ 上时是連續的,这是我們以上假定了的。

例如,如果初溫是常数:

$$当\ x\geqslant 0\ 时\quad f(x)=u_0,$$

則我們有:

$$f(-x)=u_0-2he^{-hx}\int_0^x u_0e^{hx}dx=u_0(2e^{-hx}-1),$$

于是公式(20)給出:

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\int_0^\infty e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi-\int_0^\infty e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}}d\xi+\right.$$
$$\left.+2\int_0^\infty e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}-h\xi}d\xi\right\}。\tag{21}$$

讀者不难証明,这个解可以通过函数

$$\Theta(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$$

表达如下:

$$u(x,t)=u_0\Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)+u_0e^{a^2h^2t+hx}\left[1-\Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+ah\sqrt{t}\right)\right]。\tag{22}$$

在下述情形下会得到比較簡單的結果,如果在一端 $x=0$ 沒有放射,而在这一端溫度保持是 $0°$。这时我們有边值条件

$$u|_{x=0}=0,\tag{23}$$

它可以由(19)得到，用 h 除再求当 $h\to\infty$ 时的極限。由公式(22)讓 $h\to\infty$ 可以求得解，不过只要把函数直接延續到区間 $(-\infty, 0)$ 上时，使得滿足条件

$$u|_{x=0}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}[f(\xi)+f(-\xi)]d\xi=0,$$

为此只須讓
$$f(-\xi)=-f(\xi),$$
就是需要把 $f(x)$ 作奇性延續。

这时公式(20)取下面的形状：

$$u(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty f(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi,\tag{24}$$

于是如果
$$u|_{t=0}=f(x)=u_0,$$
它就成为

$$u(x, t)=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2}d\xi=u_0\Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)。\tag{25}$$

现在我們来考慮一端界于 $x=0$ 的棡軸，而在这端它保持有溫度 $u=\varphi(t)$。先設初溫是 0°，就是

$$u|_{t=0}=0,\tag{26}$$

我們先考慮一个特殊情形 $\varphi(t)=1$，就是

$$u|_{x=0}=1。\tag{27}$$

不难得到方程(5)的滿足条件(26)与(27)的解。为此，我們讓

$$u=v+1;$$

函数 v 就也是方程(5)的解，不过它应当滿足条件

$$v|_{x=0}=0;\quad v|_{t=0}=-1,$$

于是依照公式(25)立刻可以得到 $v(x, t)$，只須讓 $u_0=-1$：

$$v(x, t)=-\Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right);\quad u(x, t)=1-\Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)。\tag{28}$$

现在設在端点 $x=0$ 直到时刻 τ 溫度保持 0°，以后保持等于 1°。我們来确定溫度的分布这时我們把溫度的分布記作 $u_\tau(x, t)$。显然，直到时刻 $t=\tau$ 我們有 $u_\tau=0$；过了这个时刻后，u_τ 就与上面得到的解一致，只須 t 的开始不是由 0 算起，而要由 τ 算起，就是在表达式(28)中要用 $t-\tau$ 来替换 t，这就給出

$$u_\tau(x, t)=\begin{cases}0 & (t\leqslant\tau),\\ 1-\Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) & (t\geqslant\tau)。\end{cases}$$

于是显然，如果在端点 $x=0$ 只是在时間区間 $(\tau, \tau+d\tau)$ 中保持溫度是 1°，而在

其余的时間它都是 0°，則对应的溫度的分布就是：

$$u_\tau(x,t)-u_{\tau+d\tau}(x,t)=-\frac{\partial u_\tau}{\partial\tau}d\tau,$$

如果在时間区間 $(\tau,\tau+d\tau)$ 中它保持有溫度 $\varphi(\tau)$，而不是 1°，則得到解：

$$-\varphi(\tau)\frac{\partial u_\tau}{\partial\tau}d\tau,$$

由此显見，如果在端点 $x=0$ 当 $\tau>0$ 时保持有溫度 $\varphi(\tau)$，則当 τ 由 0 改变到 t 时，我們把所有的單元的效果相加就得到全部的效果，这就給出我們的問題的未知解为如下形状：

$$u(x,t)=-\int_0^t\varphi(\tau)\frac{\partial u_\tau}{\partial\tau}d\tau,$$

或者，由于当 $t\geqslant\tau$ 时：

$$-\frac{\partial u_\tau}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial\tau}\Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)=\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}}e^{-x^2}dx=$$

$$=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}},$$

所以結果是：

$$u(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau。\tag{29}$$

为要使得所得到的解除滿足边值条件

$$u|_{x=0}=\varphi(t)$$

之外，不是还滿足(26)，而是滿足一般形状的初始条件

$$u|_{t=0}=f(x),$$

显然，只須对于解(29)再补充上以前得到的解(24)。

206. 两端有界的樞軸　我們来討論一种在一端 $x=0$ 保持溫度为 0° 的最典型的情形：

$$u|_{x=0}=0;\tag{30}$$

在另一端 $x=l$ 热量放射到溫度为零的周圍介質中：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=-hu\bigg|_{x=l};\tag{31}$$

初始溫度是

$$u|_{t=0}=f(x)\quad(0\leqslant x\leqslant l)。\tag{32}$$

依照富里埃法解决这个問題是很簡單的。

由于这里具有边值条件，所以我們要使以前求得的解

$$e^{-\lambda^2a^2t}X(x)=e^{-\lambda^2a^2t}[A\cos\lambda x+B\sin\lambda x] \tag{33}$$

滿足条件(30)与(31)，这就給出

$$X(0)=0,\ 即\ A=0;\ X'(l)=-hX(l),$$

由此，弃去常数因子 B，就有

$$X(x)=\sin\lambda x \tag{34}$$

以及

$$\lambda\cos\lambda l=-h\sin\lambda l. \tag{35}$$

讓 $\lambda l=v$，我們得到一个超越方程

$$\operatorname{tg}v=\alpha v,\quad 其中\ \alpha=-\frac{1}{hl}. \tag{36}$$

这个方程有无穷多个实根(圖 143)，在其中我們只注意正根：

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ \cdots,\ v_n,\ \cdots. \tag{37}$$

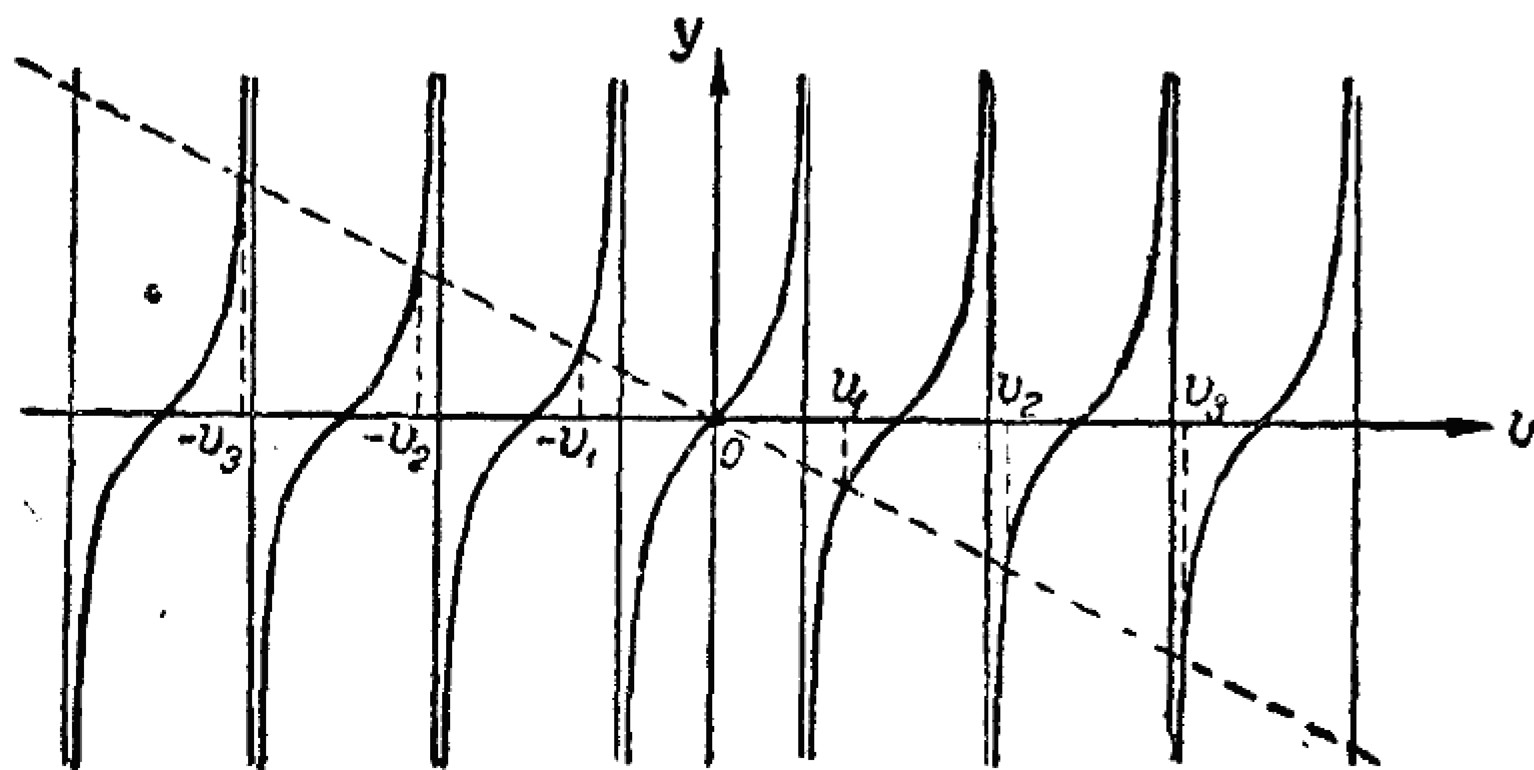


圖 143.

这些根对应于无穷多个 λ 的值：

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots,\quad 其中\ \lambda_n=\frac{v_n}{l}, \tag{38}$$

而它們依次給出方程(5)的滿足边値条件的无穷多个特解:

$$B_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t}\sin\lambda_n x \quad (n=1, 2, 3, \cdots)。$$

为要滿足初始条件,我們由下面的形状来求 u:

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t}\sin\lambda_n x, \tag{39}$$

当 $t=0$ 时,得到:

$$u|_{t=0}=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\lambda_n x=\sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x), \tag{40}$$

其中記作 $X_n(x)=\sin\lambda_n x$。現在我們来証明函数組 $X_n(x)$ 是正交的。

写出其中两个所对应的微分方程(8):

$$X_m''(x)+\lambda_m^2 X_m(x)=0;\quad X_n''(x)+\lambda_n^2 X_n(x)=0。$$

把第一个乘以 $X_n(x)$,第二个乘以 $X_m(x)$,由所得到的方程逐項相減,再沿区間 $(0, l)$ 求积分:

$$\int_0^l [X_m''(x)X_n(x)-X_n''(x)X_m(x)]\,dx+$$

$$+(\lambda_m^2-\lambda_n^2)\int_0^l X_m(x)X_n(x)\,dx=0。$$

用分部积分法于第一个积分,就得到:

$$X_m'(l)X_n(l)-X_n'(l)X_m(l)+X_n'(0)X_m(0)-$$

$$-X_m'(0)X_n(0)+(\lambda_m^2-\lambda_n^2)\int_0^l X_m(x)X_n(x)\,dx=0。\tag{41}$$

不过 $X_m(x)$ 与 $X_n(x)$ 满足边値条件(30)与(31),就是說:

$$X_m(0)=X_n(0)=0;$$

$$X_m'(l)=-hX_m(l);$$

$$X_n'(l)=-hX_n(l)。$$

根据这些等式,公式(41)中积分以外的項等于零,而注意到对于不同的 m 与 n, $\lambda_m^2-\lambda_n^2\neq 0$, 就得到:

$$\int_0^l X_m(x)X_n(x)dx=0 \qquad (m\neq n)。$$

建立了正交性，用通常的方法可以肯定，在展开式(40)中的系数 B_n 应当由下面这公式确定：

$$B_n=\int_0^l f(x)X_n(x)dx:\int_0^l X_n^2(x)dx。$$

这就解决了把函数 $f(x)$ 依函数 $X_n(x)$ 展开的問題，于是同时給出上面所給的問題的为級数形状(39)的解。在第四卷中我們要証明，像以前一样，应用富里埃法于典型的数学物理問題时所得到的函数組 $X_n(x)$ 是封閉組，在关于 $f(x)$ 的一些假定下，这个函数在基本区間上被展开为依函数 $X_n(x)$ 的一致收斂級数。注意，如果替代边值条件(30)与(31)，我們取边值条件：当 $x=0$ 与 $x=l$ 时 $u=0$，則要得到 $X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x$，于是引至通常的依正弦的富里埃級数。

討論热在一个环上的分布时，替代边值条件，我們应当建立温度的周期性条件[参考**195**]。假設环的半徑等于1，于是整个环的長度等于 2π，用 x 来記由某一个点算起时环的長度，我們就轉到下面形状的解：

$$u(x,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)e^{-a^2n^2t},$$

其中
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

是在环上初始温度分布 $f(x)$ 的富里埃級数。

要这里得到的关于 $u(x,t)$ 的級数确实解决了所考慮的問題，其充分条件将在第四卷里給出。

207. 补充知識 現在我們来看推广的热傳导方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-cv, \tag{42}$$

如果考虑到樞軸的整个界面对周圍空間的放射，而周圍空間的溫度取作等于零，就得到这个方程。

容易驗証，将

$$v=e^{-\beta t}u$$

代入方程(42)就得到关于 u 的方程(5)。

非齐次方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x, t) \tag{43}$$

在无界樞軸的情形，当初始溫度为零时，就是具有条件 $u|_{t=0}=0$ 时，有下面形状的解

$$u(x, t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}F(\xi, \tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi\, d\tau。 \tag{44}$$

要得到这个解，或者用我們在[174]中对于非齐次波动方程所应用的方法，或者由基本奇解(13)相加，在其中我們用 $t-\tau$ 替换 t，然后乘以 $F(\xi, \tau)$，由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 对 ξ 求积分。再由 $\tau=0$ 到 $\tau=t$ 对 τ 求积分。这些运算的物理意义是很明显的。用重叠热源的方法可以得到方程(43)的解，这些热源沿着整个樞軸分布，强度为 $F(\xi, \tau)$，并且由时刻 τ 开始作用。这样的热源重叠时也要依照时間进行重叠。

在二維与三維的情形，应用富里埃法时，像对于波动方程一样，引向同样的结果，只是在所考虑的情形下，依賴于时間的因子是指数函数。

例如，对于方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

在平面矩形的情形，我們有下面形状的解

$$u=e^{-\omega^2 t}U(x, y), \tag{45}$$

这里在指数中我們用 ω^2 是为了要利用[177]中的公式。設有边值条件：在 C 上 $u=0$，以及初始条件：当 $t=0$ 时 $u=\varphi_1(x, y)$。解就可以表示成下面的級数形状：

$$u=\sum_{\sigma,\tau=1}^{\infty}a_{\sigma,\tau}e^{-\omega_{\sigma,\tau}^2 t}\sin\frac{\sigma\pi x}{l}\sin\frac{\tau\pi y}{m},$$

其中 $\omega_{\sigma,\tau}^2$ 由[177]中公式(119)确定，而 $a_{\sigma,\tau}$ 由公式(114)中第一个确定。

在平面圓的情形[参考 178]，同样代入(45)，可以引出下面的解：

$$u=\sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}\alpha_{m,n}e^{-\omega_{m,n}^2 t}\cos n\theta J_n(k_m^{(n)}r)+\sum_{\substack{n=1\\m=1}}^{\infty}\beta_{m,n}e^{-\omega_{m,n}^2 t}\sin n\theta J_n(k_m^{(n)}r),$$

这里 $\alpha_{m,n}$ 与 $\beta_{m,n}$ 由[178]中确定 $\alpha_{m,n}^{(1)}$ 与 $\beta_{m,n}^{(1)}$ 的公式来确定，而 $\omega_{m,n}$ 由公式(128)确定。

208. 球的情形 在球的情形，我們平行考虑波动方程及热傳导方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u; \tag{46}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\Delta v, \tag{47}$$

我們算作初始已知条件只依賴于点到球心的距离 r:

$$u\bigg|_{t=0}=\varphi_1(r); \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\varphi_2(r); \tag{48}$$

$$v\bigg|_{t=0}=\psi(r)。 \tag{49}$$

我們取下面形状的边值条件:

$$\text{当 } r=R \text{ 时,} \quad \frac{\partial u}{\partial r}=0; \tag{50}$$

$$\text{当 } r=R \text{ 时,} \quad \frac{\partial v}{\partial r}+hv=0, \tag{51}$$

其中 R 是球的半徑并且 $h>0$。由于中心对称性，解也就不依賴于極角，如此，解就是只依賴于 r 与 t 的函数。課

$$u=(A\cos\omega t+B\sin\omega t)U(r); \tag{52}$$

$$v=Ae^{-\omega^2 t}V(r), \tag{53}$$

对于 $U(r)$ 与 $V(r)$ 就得到同样的方程 $\Delta W+k^2W=0$，其中 $k^2=\frac{\omega^2}{a^2}$。利用在球面坐标系中拉普拉斯算子的表达式，并注意 W 只依賴于 r，就得到方程:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dW}{dr}\right)+k^2W=0,$$

就是

$$\frac{d^2W}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dW}{dr}+k^2W=0。$$

再引用新的未知函数 $R(r)$ 来替代 $W(r)$:

$$R(r)=rW(r)。$$

把 $W(r)=\frac{R(r)}{r}$ 代入到关于 W 的方程中，就得到关于 $R(r)$ 的方程: $R''(r)+$ $+k^2R(r)=0$，由此 $R(r)=C_1\cos kr+C_2\sin kr$，于是推知

$$W(r)=C_1\frac{\cos kr}{r}+C_2\frac{\sin kr}{r}。$$

注意，解在球心即在 $r=0$ 时应当是有限的，我們应当算作 $C_1=0$，代入到(52)中就得到下面形状的解:

$$u=(A\cos\omega t+B\sin\omega t)\frac{\sin kr}{r};\tag{54}$$

$$v=Ae^{-\omega^2 t}\frac{\sin kr}{r}。\tag{55}$$

常数 k 以至于 $\omega=ak$ 都是由边値条件(50)与(51)来确定。

应用条件(51)于 $\frac{\sin kr}{r}$，就給出下面的关于 k 的方程.

$$\operatorname{tg} kR=\frac{kR}{1-hR}。\tag{56}$$

当 $h=0$ 时，化为由边値条件(50)所得到的方程：

$$\operatorname{tg} kR=kR。\tag{57}$$

讓 $kR=v$，我們看出，方程(56)，(57)与方程(36)完全类似。設 $k_1, k_2, \cdots$是方程(56)的正根。注意(55)，对于 $v(r, t)$ 我們得到：

$$v(r, t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a^2k_n^2t}\frac{\sin k_n r}{r}。\tag{58}$$

初始条件(49)給出：

$$r\psi(r)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n r。\tag{59}$$

像在[206]中完全一样，在区間$(0, R)$上函数 $\sin k_n r$ 是正交的，于是推知，展开式(59)的系数由下列公式确定：

$$a_n=\int_0^R r\psi(r)\sin k_n r\,dr:\int_0^R \sin^2 k_n r\,dr。$$

再看关于 u 的方程，我們仍然用 $k_n(n=1, 2, \cdots)$来記方程(57)的正根。这里我們还应当考虑到根 $k=0$，它对应的頻率 ω 等于零。这时，替代$(A\cos wt+B\sin wt)$我們应当写 $A+Bt$ 关于 $R(r)$的方程是 $R''(r)=0$，而 $W(r)=\frac{R(r)}{r}$ 是常数，于是方程(46)的对应的解是 a_0+b_0t。显然，对于任何的常数 a_0 与 b_0，它满足边値条件(50)。結果对于 u 我們得到：

$$u(r, t)=a_0+b_0t+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos ak_nt+b_n\sin ak_nt)\frac{\sin k_n r}{r}。$$

对 t 求导数再讓 $t=0$，就得到在初始条件(48)中出現的函数的展开式：

$$r\varphi_1(r)=a_0r+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin k_n r;\quad r\varphi_2(r)=b_0r+\sum_{n=1}^{\infty} k_nb_n\sin k_n r。$$

注意到方程(57)，不难驗証，在区間$(0, R)$上，$\sin k_n r$ 不仅彼此正交，与函数 r 也正交，就是說

$$\int_0^R r\sin k_n r\,dr=0,$$

当 $m \neq n$ 时，
$$\int_0^R \sin k_m r \sin k_n r \, dr = 0,$$

于是上面的表达式的系数依照通常的法則确定：

$$a_0 = \int_0^R r^2 \varphi_1(r) dr : \int_0^R r^2 dr = \frac{3}{R^3} \int_0^R r^2 \varphi_1(r) dr,$$

$$a_n = \int_0^R r\varphi_1(r) \sin k_n r \, dr : \int_0^R \sin^2 k_n r \, dr。$$

对于系数 b_n 有类似的公式。注意，对于方程(47)，当 $\omega = 0$ 时，我們得到解 v＝常数，不过这个解不满足边値条件(51)，因为依照条件 $h > 0$。

方程(46)可以解釋作为气体振动时关于速度势 u 的方程。这时边值条件(50)表达的事实是，在球面出現的气体的速度沿球面的法綫方向的分速度等于零。

关于热傳导方程(47)的边值条件(51)表达下述事实，热量由球面放射到周圍空間中，周圍空間的溫度等于零。

209. 唯一性定理　現在我們来講，当給定初始条件及边値条件时，热傳导方程的解的唯一性問題［参考 **179**］。我們就一維的問題来討論，就是关于有界樞軸 $0 \leqslant x \leqslant l$ 的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}。\tag{60}$$

在平面 xt 上作一个区域 G，界于直綫 $x=0$ 及 $x=l$，出現在 x 軸的綫段 $0 \leqslant x \leqslant l$ 以上(圖 144)。再作任何一条直綫段 $t = t_0 (t_0 > 0)$，平行于 x 軸。它由区域 G 截出一个有限矩形 $OAQP$，我們用一个字母 H 来記这个矩形。現在来証明下面这个定理：

定理　設函数 $u(x, t)$ 在 G 内满足方程(60)，并且直到 G 的界綫連續。这时，$u(x, t)$ 在 H 的最大値与最小値在由边 OP, OA 与 AQ 組成的 H 的一部分界綫 l 上达到。

証明时我們只限于考虑最大値的情形，而且用反証法来証明。設 $u(x, t)$ 的最大値不是在 l 上达到，而是在 H 内或另一边 PQ 上达到，于是我們就会引出矛盾来。設这个最大値在点 (x', t') 达到，而且等于 M。于是函数 $u(x, t)$ 在 l 上的最大値小于 M。作一个新函数 $v(x, t)$ 如下：

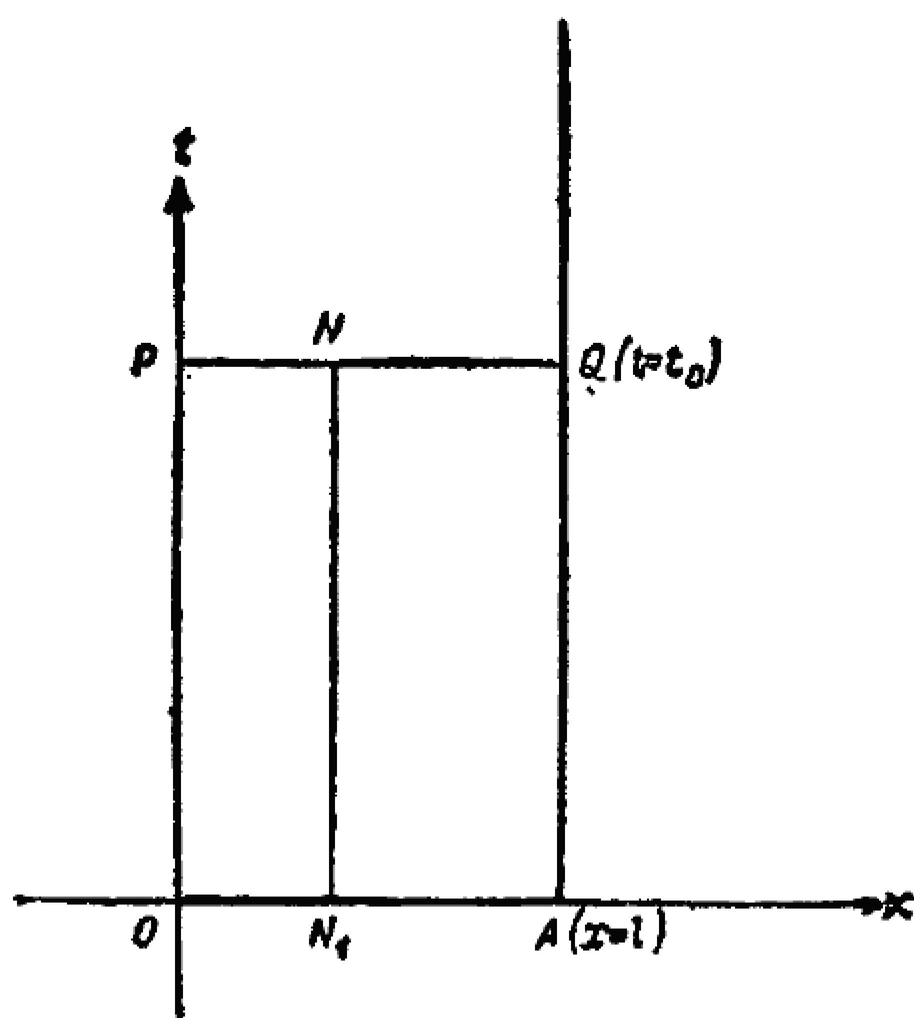


圖 144.

$$v(x,\ t)=u(x,\ t)-k(t-t_0), \tag{61}$$

其中 k 是一个正数，我們現在来固定它。在矩形 H 上我們有：

$$u(x,\ t)\leqslant v(x,\ t)\leqslant u(x,\ t)+kt_0,$$

于是我們可以固定一个与零足够近的数 k，使得 $v(x,\ t)$ 及 $u(x,\ t)$ 在 l 上的最大值小于 $v(x,\ t)$ 在点 $(x',\ t')$ 的值。这样选擇好 k 时，在 H 上函数 $v(x,\ t)$ 就不在 l 上取最大值，而在 H 内或在边 PQ 内。我們分别考虑这两种情形，这两种情形都会引至矛盾。

設 $v(x,\ t)$ 在 H 内的某一点 $C(x_1,\ t_1)$ 取最大值。則在这点 C 函数 $v(x,\ t)$ 就取極大値，于是在这点我們应当有[I, 58]：

$$\frac{\partial v}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\leqslant 0,$$

由此推出

$$\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\geqslant 0,$$

或者，根据(61)：

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-k\geqslant 0。$$

不过在G 满足方程(60)，于是所写的不等式引至荒謬的不等式：- 。現在設在H上$v(x, t)$在边PQ内一点$N(x_1, t_0)$达到 。考虑$v(x, t)$沿着平行于t軸的綫段N_1N的改变，我們在 得到不等式$\frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0$，因为函数$v(x, t)$在点$N$的值不小于它 綫段$N_1N$上的值。再考虑$v(x, t)$沿$PQ$的改变，在点$N$得 等式$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leqslant 0$，因为$v(x, t_0)$在点$N(x=x_1)$有極大值。如此， N，$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \geqslant 0$，像上面一样引出同样的矛盾，于是証

由所証明的 直接推知，若在整个界綫l上$u(x, t)$等于零，則在整个矩 上$u(x, t)$等于零，这就很簡單的引出唯一性定理。

設除方程(，具有初始条件和边值条件(在端点的已知溫度)：

$$u|_{t=0}=f(x \quad \leqslant x \leqslant l); \quad u|_{x=0}=\omega(t); \quad u|_{x=l}=\omega_1(t)。 \tag{62}$$

这些条件 G的界綫上的已知函数$u(x, t)$。我們算作这些界值在G 点O与A在内的整个界綫上是連續函数，就是說$\omega(0)=$ $\omega_1(0)=f(l)$。設对于条件(62)，在G内存在有方程(60)的 解$u_1(x, t)$与$u_2(x, t)$，它們直到G的界綫是連續的。这 之差$u(x, t)=u_1(x, t)-u_2(x, t)$也是方程(60)的解，它在 整个界綫上等于零。由以上証明的定理直接推知，u在G内 等于零，就是說，$u_1(x, t)$与$u_2(x, t)$全同。注意，如果不要求 $t)$在点O与A連續，而只要求这两个函数在这两个点的近 ，唯一性定理仍然成立。这时在这两个点界值不应当是連續

公式(12)給 于无界樞軸的解。設已知函数$f(x)$連續并且

在某一个綫段$(-b, +b)$之外它等于零，于是

$$u(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-b}^{+b} f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi。$$

利用这个公式，不难証明，当$x\to+\infty$或$x\to-\infty$时，对t来講，$u(x, t)$一致趋向零，就是說，当給定任何正数ε时，存在有这样的正数N，使得当$|x|\geqslant N$而t为任何值时$|u(x, t)|\leqslant\varepsilon$。我們来証明，对于給定的初始条件(6)，具有这样的性質的解只有一个。像以上一样，只須証明$u(x, t)$在x軸上取最大值与最小值。我們用反証法来証明。設$u(x, t)$在某一点$C(x_1, t_1)$取最大值M，其中$t_1>0$，就是說，在区間$-\infty<x<+\infty$上$f(x)<M$。注意到在区間$(-b, b)$之外$f(x)=0$，就可以断定$M>0$。作两条直綫$x=+d$与$x=-d$，选擇d足够大以至于在这两条直綫上不等式$|u(x, t)|<M$成立，由这两条直綫，x軸以及过点C平行于x軸的直綫作成一个矩形(圖 145)。函数$u(x, t)$在点C的值大于它

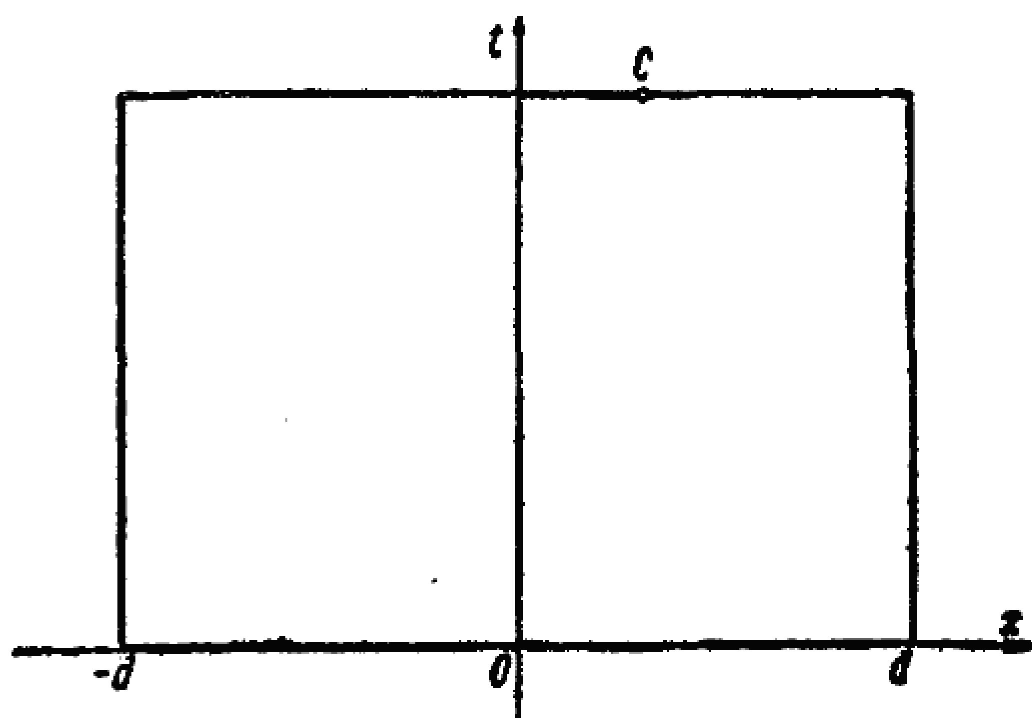


圖 145.

在由三边$x=d$, $x=-d$与$t=0$組成的H的一部分界綫l上的值。如此，函数$u(x, t)$在矩形H上的最大值，或者在H内，或者在通过点C的一边内达到，这就如同上面一样引至矛盾。如此，証明了在对于$f(x)$所作的假定下具有上述性質的問題的解的唯一性。

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝高等数学教程　　第二卷　　第三分册（修订本）
作者＝Ｂ．и．斯米尔诺夫
页数＝１０８６
ＳＳ号＝１０５３０６４6
出版日期＝１９５３年０８月第１版